Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática Estatística e Física - IMEF

Programa de Incentivo à Matemática

PRIMA

Matemática Financeira com Uso da HP-12C

Alessandro da Silva Saadi
Felipe Morais da Silva

2016

Sobre os autores:

Alessandro da Silva Saadi

Graduado, especialista e mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG), atuou como professor de Matemática Financeira e Matemática Aplicada nos cursos de Administração de Empresas, Matemática, Ciências Econômicas e Ciências Contábeis na FURG. Atualmente é matemático da FURG e professor da Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas (ETEGV) em Rio Grande.

Felipe Morais da Silva

Estudante do curso de Matemática Aplicada da FURG, atua como bolsista no Programa de Incentivo à Matemática - PRIMA desde 2013.

SAADI, Alessandro da Silva, SILVA, Felipe Morais da. **Matemática Financeira com Uso da HP-12C**. Rio Grande: Editora da FURG, 2016.

Sumário

Apresentação

A Importância da Matemática Financeira

Ao pagar uma dívida ou impostos ou ao adquirir um bem, o cidadão tem diversas opções de pagamento, mas ainda apresenta dúvidas ao decidir o que é melhor: comprar à vista ou a prazo. Para analisar criticamente o que influencia sua tomada de decisão, a pessoa precisa ter conhecimento de conceitos como: taxa de juros, prazo, carência e outros tantos.

O objetivo do ensino da Matemática Financeira é formar cidadãos que saibam analisar criticamente as operações financeiras de que faz uso diariamente, tendo o poder de optar e decidir o que melhor lhe convém diante de suas expectativas, interpretando e refletindo sobre as opções que o mercado oferece.

O Livro

Este livro é fruto do projeto Educação Financeira na Escola do Edital 01/2014 - Propesp/Proexc da Universidade Federal do Rio Grande - FURG referente à Popularização da Ciência e Tecnologia. Integra o projeto Programa de Incentivo à Matemática- PRIMA e tem o apoio da Coordenação de Acompanhamento e Apoio Pedagógico ao Estudante- CAAPE ligada à Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis- Prae e do Instituto de Matemática, Estatística e Física- IMEF.

A popularização da ciência e da tecnologia se dá quando os estudantes se deparam com a Matemática envolvida e com a utilização de uma tecnologia que é a calculadora financeira HP-12C.

São objetivos do livro:

1. Revisar os conceitos financeiros e apresentar os princípios matemáticos para o cálculo de juros, descontos, montantes e valores atuais.

2. Ensinar e explorar os recursos da calculadora HP-12C utilizando dados de situações-problemas do cotidiano, associando com os conceitos apresentados.

3. Motivar os estudantes para a aprendizagem e aplicação da educação financeira na vida pessoal e profissional.

Atenciosamente

Alessandro da Silva Saadi
Felipe Morais da Silva

Contato:

- Site: www.prima.furg.br
- E-mail: prima@furg.br
- Telefone: 53 32336907

Capítulo 1

Conceitos Financeiros

1.1 Juros (J)

O juro **(J)** é o pagamento (ou recebimento) pelo uso de um valor monetário por um determinado período de tempo. Pode ser entendido como sendo o custo do crédito ou a remuneração do capital aplicado.

1.2 Capital Inicial ou Valor Presente (PV)

É o valor monetário que serve de base para o cálculo dos juros. Também é conhecido como: *principal*, *valor presente* ou em língua inglesa, *Present Value* (PV). Nas séries de pagamentos uniformes, o valor presente significa o valor a vista de tal série.

Na calculadora financeira HP-12C, utiliza-se $\boxed{\text{PV}}$ para indicar o capital inicial ou valor presente.

1.3 Taxa de Juros (i)

É o coeficiente obtido da relação dos juros (J) com o capital (PV), que pode ser representado em forma percentual ou unitária (decimal), isto é:

$$\boxed{i = \frac{J}{PV}}$$

Nas taxas de juros, deve-se ter uma parte numérica para um referido período de tempo. Por exemplo, na taxa 10% ao mês, a parte numérica é *10%* e o período de tempo que se refere é *ao mês*.

Apresentação das Taxas

As taxas podem ser expressas de duas maneiras:

- Forma percentual (%):
  Exemplo: 2% ao mês.

- Forma unitária ou decimal:
  Exemplo: 0,02 ao mês.

Na calculadora HP-12C será usada a taxa na forma percentual, utiliza-se a tecla $\boxed{\text{i}}$, enquanto as taxas unitárias serão utilizadas nas operações algébricas (utilizando as fórmulas).

Para converter a taxa que geralmente é dada na forma percentual para a forma unitária, basta dividir por 100. Para realizar o processo inverso, isto é, transformar a taxa unitária em percentual, basta multiplicar por 100.

Veja a tabela:

Taxa percentual	**Taxa unitária**
3,5% ao mês	0,035 ao mês
0,5% ao mês	0,005 ao mês
15% ao bimestre	0,15 ao bimestre
130% ao ano	1,3 ao ano

Principais Abreviaturas de Taxas

Uma maneira de simplificar a escrita das taxas de juros é abreviando os períodos de tempo como no quadro a seguir:

Por extenso	**Abreviada**
ao dia	a.d.
ao mês	a.m.
ao bimestre	a.bim.
ao trimestre	a.trim.
ao semestre	a.s.
ao ano	a.a.

1.4 Prazo ou Períodos (n)

É o tempo necessário que um certo capital, aplicado a uma taxa de juros necessita para produzir um montante. Nas séries de pagamento, o prazo (n) significa o número de parcelas de um financiamento, por exemplo.

Geralmente, nas operações financeiras utiliza-se o mês e o ano comercial, cujos números de dias são de 30 e 360, respectivamente e o juro assim calculado é chamado de juro comercial e a contagem dos dias para cobrança ou pagamento dos juros deve ser feita de forma exata.

Na calculadora financeira HP-12C, utiliza-se $\boxed{\text{n}}$ para indicar o prazo ou número de parcelas (séries de pagamentos).

1.5 Montante ou Valor Futuro (FV)

O Montante ou Valor Futuro é a soma do capital com o juro do período nas operações com valores únicos e é o valor acumulado resultante de uma série de pagamentos iguais, tais como os planos de capitalização. Na calculadora financeira HP-12C, utiliza-se $\boxed{\text{FV}}$ para indicar o montante ou valor futuro.

1.6 Prestação (PMT)

É o valor da prestação em uma série de pagamentos uniforme. Na calculadora financeira HP-12C, utiliza-se $\boxed{\text{PMT}}$ para indicar o valor da prestação.

1.7 Regimes de Capitalização

Pode-se definir como regime de capitalização, a metodogia pela qual os capitais são remunerados. Os regimes de capitalização utilizados são o **simples** e o **composto**.

Capítulo 2

Capitalização Simples

2.1 Os Juros Simples

Neste sistema, somente o capital inicial rende juros. Veja a situação seguinte e entenda como funciona o cálculo dos juros simples.

Situação:

Qual será o valor do juro se o prazo for de 1 mês? E se o prazo for 2 meses? E 3 meses? E se fosse em n meses?

Veja a simulação na seguinte tabela:

Prazo Mês	Capital Inicial	Cálculo do Juro	Juro do período
1		$J = 100 \cdot 0,10 \cdot 1$	
2		$J = 100 \cdot 0,10 \cdot 2$	
3		$J = 100 \cdot 0,10 \cdot 3$	
n		$J = PV \cdot i \cdot n$	

Observações:

1. Na fórmula do juro simples a taxa de juros (i) deve ser usada na forma unitária ou decimal.

2. A unidade de tempo da taxa deve estar na mesma unidade de tempo do prazo.

Fórmulas Derivadas

Temos a fórmula para calcular o juro simples ($J = PV \cdot i \cdot n$) sabendo o valor presente, a taxa e o prazo. Para descobrirmos o **PV**, **i** ou **n**, quando esses são desconhecidos é só pôr em evidência o termo desconhecido, Assim temos:

$$\boxed{PV = \frac{J}{i \cdot n}}$$

$$\boxed{i = \frac{J}{PV \cdot n}}$$

$$\boxed{n = \frac{J}{PV \cdot i}}$$

Cálculos com a HP-12C

Observação: Antes de começar a usar sua calculadora financeira HP-12C, leia o Apêndice A- **Uso da Calculadora HP-12C.**

1. Qual o valor dos juros simples produzidos por R$ 2.500,00 em 6 meses à taxa de 2% a.m.?

   Dados:
   PV = R$ 2.500,00
   i = 2% a.m = 0,02
   n = 6 meses
   J = ?

Solução Algébrica:
$J = PV \cdot i \cdot n$
$J = 2500 \cdot 0,02 \cdot 6$
$J =$ R$ 300,00

Na HP-12C:	
2500	ENTER
2	%
6	×
R$ 300,00	

   Observação: *Veja a função das teclas* $\boxed{ENTER}$ *e* $\boxed{\%}$ *no Apêndice A.*

2. Uma fatura de R$ 625,00 foi paga 2 meses após seu vencimento. Sabendo que a taxa de juros simples cobrada é de 6%a.m, calcule o juro.

   Dados:
   PV = R$ 625,00
   i = 6% a.m = 0,06
   n = 2 meses
   J = ?

Solução Algébrica:
$J = PV \cdot i \cdot n$
$J = 625 \cdot 0,06 \cdot 2$
$J =$ R$ 75,00

Na HP-12C:	
625	ENTER
6	%
2	×
R$ 75,00	

3. Sobre uma duplicata de R$ 850,00, paga com atraso de 3 meses foi cobrado R$ 102,00 de juros. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada?

   Dados:
   PV = R$ 850,00
   J = R$ 102,00
   n = 3 meses
   i = ?

Solução Algébrica:
$i = \frac{J}{PV \cdot n}$
$i = \frac{102}{850 \cdot 3}$
$i = \frac{102}{2550}$
$i = 0,04 \cdot 100$
$i = 4\%\ a.m$

Na HP-12C:	
850	ENTER
102	%T
3	÷
4% a.m	

   Observação: *Veja a função da tecla* $\boxed{\%T}$ *no Apêndice A.*

4. Um capital rendeu juros simples de R$ 39,00 quando ficou aplicado durante 4 meses a uma taxa de 3% a.m. Qual o valor de tal capital?

Dados:
J = R$ 39,00
i = 3% a.m = 0,03
n = 4 meses
PV = ?

Solução Algébrica:
$PV = \frac{J}{i \cdot n}$
$PV = \frac{39}{0{,}03 \cdot 4}$
$PV = \frac{39}{0{,}12}$
$PV =$ R$ 325,00

Na HP-12C:	
39	ENTER
0,03	ENTER
4	× ÷
R$ 325,00	

5. Dona Joaninha emprestou R$ 500,00 a uma amiga e cobrou R$ 90,00 de juros. Calcule o tempo que a amiga levou para pagar sabendo que a taxa cobrada foi de 9% a.m.

Dados:
PV = R$ 500,00
i = 9% a.m = 0,09
J = R$ 90,00
n = ?

Solução Algébrica:
$n = \frac{J}{PV \cdot i}$
$n = \frac{90}{500 \cdot 0{,}09}$
$n = \frac{90}{45}$
$n = 2$ meses

Na HP-12C:	
500	ENTER
90	%T
9	÷
2 meses	

2.2 Cálculo do Montante

O montante (FV) é a incorporação dos juros ao capital inicial, ou seja, é o capital mais os juros.

$$FV = PV + J$$
$$FV = PV + PV \cdot i \cdot n$$

Colocando em evidência o fator comum PV:

$$\boxed{FV = PV(1 + i \cdot n)}$$

Fórmulas Derivadas

$$\boxed{PV = \frac{FV}{1 + i \cdot n}}$$

$$\boxed{i = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{n}}$$

$$\boxed{n = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{i}}$$

Cálculos com a HP-12C

1. Qual é o montante de um capital de R\$3.500,00 aplicado a taxa de 5% a.m. pelo prazo de 2 meses?

Dados:
PV = R\$ 3.500,00
i = 5% a.m = 0,05
n = 2 meses
FV = ?

Solução Algébrica:
$FV = PV(1 + i \cdot n)$
$FV = 3500(1 + 0,05 \cdot 2)$
$FV = 3500(1 + 0,1)$
$FV = 3500(1,1)$
FV = R\$ 3.850,00

Na HP-12C:	
3500	ENTER
5	%
2	× +
R\$ 3.850,00	

2. O Sr Malta deve uma fatura no valor de R\$ 750,00 ao Banco Alfa com vencimento em 02/08/2015. O banco cobra juros de 3% a.m. caso a fatura seja paga em atraso. O Sr Malta pagou a fatura no dia 02/12/2015. Calcule o total que ele pagou.

Dados:
PV = R\$ 750,00
i = 3% a.m = 0,03
n = 4 meses
FV = ?

Solução Algébrica:
$FV = PV(1 + i \cdot n)$
$FV = 750(1 + 0,03 \cdot 4)$
$FV = 750(1 + 0,12)$
$FV = 750(1,12)$
FV = R\$ 840,00

Na HP-12C:	
750	ENTER
3	%
4	× +
R\$ 840,00	

3. O Grupo SS aplicou R\$ 1800,00 em um fundo de renda fixa durante 3 meses e resgatou R\$ 2043,00. Qual a taxa mensal de juros simples nesta aplicação?

Dados:
PV = R\$ 1.800,00
n = 3 meses
FV = R\$ 2.043,00
i = ?

Solução Algébrica:

$i = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{n}$

$i = \frac{\frac{2043}{1800} - 1}{3}$

$i = \frac{1{,}135 - 1}{3}$

$i = \frac{0{,}135}{3}$

$i = 0,045 \cdot 100$

$i = 4{,}5\%$ a.m

Na HP-12C:

1800	$\boxed{\text{ENTER}}$
2043	$\boxed{\Delta\%}$
3	$\boxed{\div}$

4,5 % a.m

Observação: *Veja a função da tecla* $\boxed{\Delta\%}$ *no Apêndice A.*

4. Quanto tempo deve ficar aplicado o capital de R\$ 600,00 à taxa de juros simples de 2% a.m. para que se receba um montante de R\$ 660,00?

Dados:
PV = R\$ 600,00
i = 2% a.m = 0,02
FV = R\$ 660,00
n = ?

Solução Algébrica:

$n = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{i}$

$n = \frac{\frac{660}{600} - 1}{0{,}02}$

$n = \frac{1{,}1 - 1}{0{,}02}$

$n = \frac{0{,}1}{0{,}02}$

n = 5 meses

Na HP-12C:

600	$\boxed{\text{ENTER}}$
660	$\boxed{\Delta\%}$
2	$\boxed{\div}$

5 meses

5. Um certo capital aplicado a uma taxa de 5% a.m. durante 6 meses gerou um montante de R\$1.560,00. Qual foi o valor aplicado?

Dados:
i = 5% a.m = 0,05
n = 6 meses
FV = R\$ 1.560,00
PV = ?

Solução Algébrica:

$PV = \frac{FV}{1+i \cdot n}$

$PV = \frac{1560}{1+6 \cdot 0{,}05}$

$PV = \frac{1560}{1+0{,}3}$

$PV = \frac{1560}{1{,}3}$

$PV =$ R\$ 1.200,00

Na HP-12C:

1560	$\boxed{\text{ENTER}}$
1	$\boxed{\text{ENTER}}$
6	$\boxed{\text{ENTER}}$
0,05	$\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\div}$

R\$ 1.200,00

2.3 Taxas Proporcionais e Equivalentes

Taxas Proporcionais: Dizemos que duas taxas são proporcionais quando seus valores formam uma proporção direta com os respectivos prazos, considerados numa mesma unidade de tempo.

Exemplos:

1. Seja a taxa de 24% a.a., determine a taxa proporcional mensal. Note que 1 ano tem 12 meses, assim:

$$\frac{24}{12} = \frac{x}{1} \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{12} = 2\% a.m.$$

2. Qual é a taxa diária proporcional a uma taxa de 12% a.m.? Note que 1 mês tem 30 dias, assim:

$$\frac{12}{30} = \frac{x}{1} \Rightarrow 30x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{30} = 0,4\% a.d.$$

3. Qual a taxa anual proporcional a uma taxa de 1,5% a.m.? Note que 1 ano tem 12 meses, assim:

$$\frac{x}{12} = \frac{1,5}{1} \Rightarrow x = 1,5 \cdot 12 \Rightarrow x = 18\% a.a.$$

Taxas Equivalentes: As taxas são chamadas equivalentes quando aplicadas ao mesmo capital durante o mesmo espaço de tempo produzem os mesmos juros.

Seja um capital de R$2.000,00 que pode ser aplicado alternativamente à taxa de 2% a.m. ou de 24% a.a. Sendo o prazo de aplicação de 2 anos, verifique se as taxas são equivalentes.

2% a.m.	24% a.a.
$J = 2000 \cdot 0,02 \cdot 24$ $J = 960,00$	$J = 2000 \cdot 0,24 \cdot 2$ $J = 960,00$

Logo, em juros simples, as taxas de 2% a.m. e 24% a.a. são equivalentes.

Cálculos com a HP-12C

1. Calcular os juros simples comerciais produzidos por um capital aplicado de R$ 2.000,00 a uma taxa de juros simples de 36%a.a., no período de 11 de fevereiro de 2015 à 5 de junho de 2015.
   Primeiramente, faremos a contagem exata dos dias utilizando a tabela seguinte:

Mês	*Contagem dos dias*
fev	28 − 11 = 17
mar	31
abr	30
mai	31
jun	5
Total	114

Na HP-12C:
[f] [6]
[g] [D.MY]
11 [•] 022015 [ENTER]
05 [•] 062015 [g] [ΔDYS]
Resp.:114 dias

Dados:
PV = R$ 2.000,00
i = 36% a.a = 0,36
$i_{dia} = \frac{0,36}{360} = 0,001$
n = 114 dias
J = ?

Solução Algébrica:
$J = PV \cdot i \cdot n$
$J = 2000 \cdot 0,001 \cdot 114$
$J =$ R$ 228,00

Na HP-12C:
2000 [ENTER]
36 [%]
360 [÷]
114 [×]
R$ 228,00

Observação: *Veja Cálculo com Datas no Apêndice A.*

2. O valor de face do IPTU da LB Brasil é de R$250,00 com vencimento em 10/03/2005. Sabendo que é cobrada uma multa de 4% por pagamento efetuado após esta data e juros de mora de 6%a.m., calcule o valor a ser pago se o contador da empresa puder pagar esta dívida no dia 05/04/2005?

Importante: *A multa e o juro tem como base de cálculo o valor da duplicata ou fatura.*

P.M.Cidade
R. Central , 256
Cidade - RS

IPTU

Se paga após o vencimento, cobrar multa de 4%, mais juros de 6%a.m.	Vencimento	10/03/2005
	Valor	R$ 250,00
	Multa	10,00
	Juros	13,00
	Total	273,00

Autenticação Mecânica
pag100320070250000 4%6256

Mês	*Contagem dos dias*
mar	31 − 10 = 21
abr	05
Total	26

Na HP-12C:
f 6
g D.MY
10 • 032005 ENTER
05 • 042005 g ΔDYS
Resp.:26 dias

Dados:
PV = R$ 250,00
i = 6% a.m. = 0,06
$i_{dia} = \frac{0{,}06}{30} = 0{,}002$
n = 26 dias
$i_{multa} = 4\% = 0{,}04$
J = ?

Solução Algébrica:
$J = PV \cdot i \cdot n$
$J = 250 \cdot 0{,}002 \cdot 26$
$J =$ R$ 13,00
$Multa = 250 \cdot 0{,}04$
$= 10{,}00$
$Total = 250 + 13 + 10$
$= 273{,}00$

Na HP-12C:

Cálculo do Juro:
250 $\boxed{\text{ENTER}}$
6 $\boxed{\%}$
30 $\boxed{\div}$
26 $\boxed{\times}$
R$ 13,00

Cálculo da multa:
$\boxed{x \gtrless y}$
4 $\boxed{\%}$
R$ 10,00

Total a pagar:
$\boxed{+}$ $\boxed{+}$
R$ 273,00

Observação: *Veja a função da tecla* $\boxed{x \gtrless y}$ *no Apêndice A.*

2.4 Problemas Propostos

1. Carlito quer comprar uma TV que custa R$ 230,00 à vista, mas só terá dinheiro após 2 meses. Ele pede emprestado a seu amigo Samir essa quantia. Samir, que não é bobo, empresta, mas cobrará juros simples de 6% ao mês. Calcule quanto Carlito deverá pagar a Samir.

2. O Sr Ferreira pegou emprestado de seu amigo Silva a quantia de R$ 600,00 e pagou R$ 660,00 após 2 meses. Ferreira gostaria de saber qual foi a taxa mensal de juros simples que o Sr Silva cobrou dele.

3. Qual será o montante de um capital de R$ 1.200,00, aplicados a juros simples de 57,6%a.a. depois de um bimestre?

4. Calcular o juro simples e o montante de:

   (a) R$ 450,00 a 3% a.m. durante 4 meses.

   (b) R$ 2400,00 a 30,6%a.a. durante 2 meses.

   (c) R$ 350,00 a 9%a sem. durante 9 meses.

5. A qual taxa devo aplicar um certo capital, de modo a triplicá-lo ao final de 3 anos?

6. Quanto receberá um aplicador que tenha investido R$ 5.000,00 à taxa de juros de 31,8% a.a. pelo prazo de 2 anos e 7 meses?

7. Qual é a taxa de juros anual cobrada, se uma pessoa aplicou o capital de R$ 1.000,00 e recebeu um montante de R$ 1.420,00 pelo prazo de 2 anos?

8. Uma loja vende uma moto por R$ 4.500,00 à vista. A prazo vende na seguinte condição: entrada de R$ 1.300,00 e o saldo no valor de R$ 3.500,00 após 3 meses. Qual a taxa de juros simples mensal?

9. Uma clínica cobra R$ 50,00 para fazer um exame. O cliente pode optar em fazer o pagamento em 2 vezes: uma entrada de R$ 30,00 e mais R$ 30,00 para 30 dias. Qual a taxa de juros simples cobrada nesta operação?

10. Uma Empresa de Factoring, para captar recursos, paga a seus investidores uma taxa de juros simples de 2,5%a.m. Sabendo que o Sr. X aplicou R$ 2.500,00 durante 42 dias e o Sr. Y aplicou R$ 4.500,00 durante 37 dias, pergunta-se quanto recebeu cada um neste investimento?

11. O *Banco do Povo* tem sempre um cartão de crédito perfeito para os seus clientes. Em parceria com a grande marca *FiadoCard*, o *Banco do Povo* oferece cartões exclusivos e adequados às suas necessidades, com crédito rotativo, fatura mensal detalhada e várias opções de data de vencimento. Leo é cliente do *Banco do Povo* e tem o cartão de crédito *FiadoCard*. Para o mês de fevereiro, sua fatura é de R$ 210,00 com vencimento no dia 12. O pagamento mínimo é de 15% do valor total da fatura e a taxa que incide sobre o saldo devedor é de 16%a.m. Pergunta-se:

    (a) Qual o valor do pagamento mínimo da fatura do cartão de Leo?

    (b) Se Leo resolver pagar o valor mínimo, de quanto será o juro a ser pago na próxima fatura?

    (c) Se ele resolver pagar a metade da fatura no mês de fevereiro, qual o valor a pagar no próximo mês, sabendo que ele tem uma despesa de R$ 150,00 para o mês seguinte?

Capítulo 3

Capitalização Composta

3.1 Cálculo do Montante

Podemos entender os juros compostos como sendo o que popularmente chamamos de *juros sobre juros*, mas na verdade, o correto é afirmar que **os juros incidem sobre o montante imediatamente anterior**. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e o seu cálculo é conhecido como cálculo exponencial de juros.

Cálculo a Juros Simples

n	Juro por período	Montante
1	$1000 \cdot 0,2 \cdot 1 = 200$	R\$ 1.200,00
2	$1000 \cdot 0,2 \cdot 2 = 400$	R\$ 1.400,00
3	$1000 \cdot 0,2 \cdot 3 = 600$	R\$ 1.600,00
4	$1000 \cdot 0,2 \cdot 4 = 800$	R\$ 1.800,00

Cálculo a Juros Compostos

n	Juro por período	Montante
1	$1000 \cdot 0,2 = 200$	R\$ 1.200,00
2	$1200 \cdot 0,2 = 240$	R\$ 1.440,00
3	$1440 \cdot 0,2 = 288$	R\$ 1.728,00
4	$1728 \cdot 0,2 = 345,60$	R\$ 2.073,60

Para encontrarmos uma fórmula para calcular o montante, em uma operação financeira, vamos considerar um capital inicial que chamamos de **PV** e uma taxa **i** e calcular o montante período a período:

Note que para saber o novo montante, devemos multiplicar o valor atual por $(1+i)$.

$$FV_1 = PV(1+i)$$
$$FV_2 = FV_1(1+i) = PV(1+i)(1+i) = PV(1+i)^2$$
$$FV_3 = FV_2(1+i) = PV(1+i)^2(1+i) = PV(1+i)^3$$
$$FV_4 = FV_3(1+i) = PV(1+i)^3(1+i) = PV(1+i)^4$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$FV_n = PV(1+i)^n$$

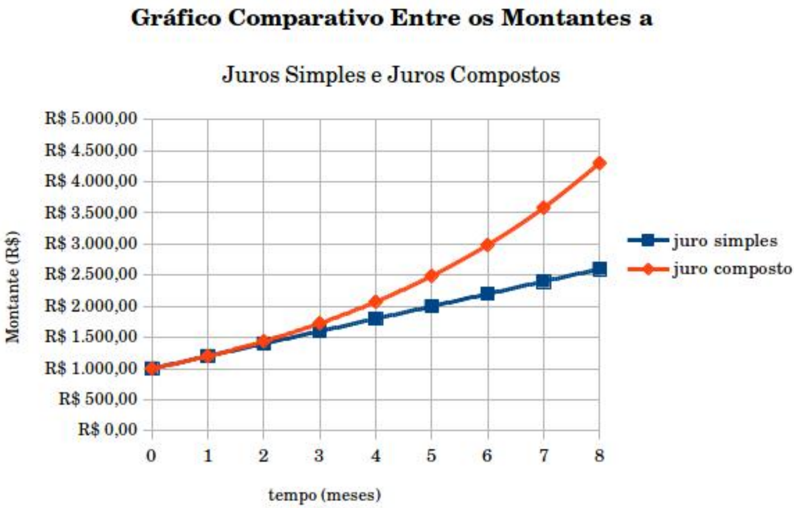
ou simplesmente $\boxed{FV = PV(1+i)^n}$ $\dashrightarrow$ fórmula geral do montante.

Observações:

1. A taxa deve ser usada na forma unitária;

2. O prazo e a taxa devem estar em uma unidade comum de tempo;

3. O termo $(1+i)^n$ é chamado de FAC (fator de acumulação de capitais) e em alguns casos já se têm esses valores calculados em tabelas financeiras.



Fórmulas Derivadas

$$\boxed{PV = \frac{FV}{(1+i)^n}}$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1}$$

$$\boxed{n = \frac{\log(\frac{FV}{PV})}{\log(1+i)}}$$

Cálculos com a HP-12C

1. Calcular o montante a juros compostos de um capital de R\$12.000,00 à taxa de 3% a.m., durante 8 meses.

   Dados:
   PV = R\$ 12.000,00
   i = 3% a.m = 0,03
   n = 8 meses
   FV = ?

Solução Algébrica:
$FV = PV(1+i)^n$
$FV = 12000(1+0,03)^8$
$FV = 12000(1,03)^8$
$FV = 12000(1,26677)$
$FV =$ R\$ 15.201,24

   Observação

   Nas calculadoras financeiras é possível calcular diretamente qualquer uma das variáveis da fórmula $FV = PV(1+i)^n$, para tanto é preciso que sejam conhecidas três das variáveis para que seja calculada a quarta variável.

   Na calculadora HP-12C, por exemplo, temos as seguintes teclas para cálculo de juros compostos:

   $\boxed{\text{PV}}$ (do inglês *Present Value*) representa o capital

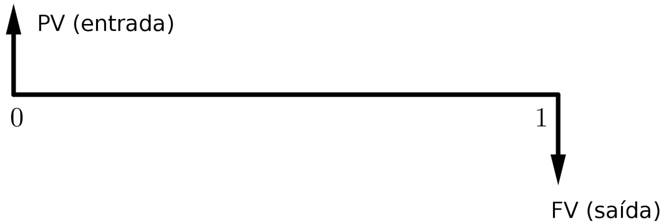
   $\boxed{\text{FV}}$ (do inglês *Future Value*) representa o montante

   $\boxed{\text{i}}$ (do inglês *interest*) representa a taxa

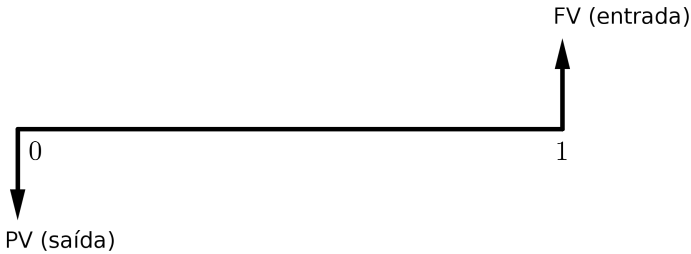
   $\boxed{\text{n}}$ representa o número de períodos

   É importante ressaltar que a calculadora HP-12C precisa de ajuda para comparar o fluxo de caixa, ou seja, é preciso informar quando temos uma entrada ou uma saída.
   Quando um valor entra no *Caixa* ele é positivo e quando um valor sai do *Caixa* é negativo. Observe os fluxos de caixa a seguir:

Do ponto de vista de quem recebe um empréstimo



Do ponto de vista do emprestador



Na HP-12C a tecla $\boxed{\text{CHS}}$ (do inglês Change Sign) serve para introduzir ou tirar um sinal negativo de um número.

Agora vejamos a solução do problema na calculadora financeira HP-12C:

Na HP-12C:
12000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
3 $\boxed{\text{i}}$
8 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$
R\$ 15.201,24

Observação: *Veja as funções Trocar o Sinal e Pilha Operacional (X, Y, Z, T) no Apêndice A.*

2. Um comerciante consegue um empréstimo de R$15.000,00 que deverão ser pagos, ao fim de 1 ano, acrescido de juros compostos de 2% a.m. Quanto o comerciante deverá pagar ao fim do prazo combinado?

Dados:
PV = R$ 15.000,00
n = 1ano =12 meses
i = 2% a.m = 0,02
FV = ?

Solução Algébrica:
$FV = PV(1+i)^n$
$FV = 15000(1+0,02)^{12}$
$FV = 15000(1,02)^{12}$
$FV = 15000(1,26824)$
$FV =$ R$ 19.023,63

Na HP-12C:
15000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
12 $\boxed{\text{n}}$
2 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{FV}}$
R$ 19.023,63

3. Queremos ter R$ 37.443,60 dentro de 7 meses. Se a taxa de juros for de 2,5% a.m., quanto devemos aplicar hoje para alcançar esse objetivo?

Dados:
FV = R$ 37.443,60
n = 7 meses
i = 2,5% a.m = 0,025
PV = ?

Solução Algébrica:
$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$
$PV = \frac{37443,60}{(1+0,025)^7}$
$PV = \frac{37443,60}{(1,025)^7}$
$PV = \frac{37443,60}{1,18869}$
$PV =$ R$ 31.500,00

Na HP-12C:
37443,60 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{FV}}$
7 $\boxed{\text{n}}$
2,5 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PV}}$
R$ 31.500,00

4. Um administrador aplica R$ 42.000,00 em 02/01/2015 e resgata R$ 45.245,93 em 02/06/2015. Qual a taxa de juros mensal?

Dados:
PV = R$ 42.000,00
FV = R$ 45.245,93
n = 5 meses
i = ?

Solução Algébrica:
$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$
$i = \sqrt[5]{\frac{45245,93}{42000}} - 1$
$i = \sqrt[5]{1,07728} - 1$
$i = 1,015 - 1$
$i = 0,015 \cdot 100$
$i = 1,5\%$ a.m

Na HP-12C:
42000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
45245,93 $\boxed{\text{FV}}$
5 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{i}}$
1,5% a.m

5. Um economista aplicou um excedente de R$12.500,00 em um fundo que paga 3% a.m. e resgatou R$ 15.834,63 alguns meses depois. Calcule esse tempo.

Dados:	Solução Algébrica:	Na HP-12C:
PV = R$ 12.500,00	$n = \frac{\log \frac{FV}{PV}}{\log(1+i)}$	12500 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
i = 3% a.m = 0,03	$n = \frac{\log(\frac{15834,63}{12500})}{\log(1,03)}$	3 $\boxed{\text{i}}$
FV = R$ 15.834,63	$n = \frac{\log 1,26677}{\log 1,03}$	15834,63 $\boxed{\text{FV}}$
n = ?	$n = \frac{0,23647}{0,02956}$	$\boxed{\text{n}}$
	n = 8 meses	8 meses

3.2 Cálculo dos Juros Compostos

O juro pode ser encontrado pela diferença entre o montante e o capital inicial. Veja:

$$J = FV - PV$$
$$J = PV(1+i)^n - PV$$
$$J = PV[(1+i)^n - 1]$$

Cálculos com a HP-12C

1. Calcular o juro de um capital de R$7.000,00 à taxa de 2%a.m., durante 8 meses.

Dados:	Solução Algébrica:	Na HP-12C:
PV = R$ 7.000,00	$FV = PV(1+i)^n$	7000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
i = 2% a.m = 0,02	$FV = 7000(1,02)^8$	2 $\boxed{\text{i}}$
n = 8 meses	$FV = 7000(1,17166)$	8 $\boxed{\text{n}}$
FV = ?	FV = R$ 8201,62	$\boxed{\text{FV}}$
J = ?	$J = FV - PV$	8201,62
	$J = 8201,62 - 7000$	7000 $\boxed{-}$
	J = R$ 1.201,62	R$ 1.201,62

2. Sabendo-se que a poupança paga juros (mais correção) de 0,7% a.m., calcule o juro composto de um capital aplicado de R$ 5.000,00 durante 6 meses.

Dados	Solução Algébrica	Na HP-12C
PV = R$ 5.000,00	$FV = PV(1+i)^n$	5000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
i = 0,7% a.m = 0,007	$FV = 5000(1,007)^6$	0,7 $\boxed{\text{i}}$
n = 6 meses	$FV = 5000(1,04274)$	6 $\boxed{\text{n}}$
FV = ?	$FV =$ R$ 5.213,71	$\boxed{\text{FV}}$
J = ?	$J = FV - PV$	5213,71
	$J = 5213,71 - 5000$	5000 $\boxed{-}$
	$J =$ R$ 213,71	R$ 213,71

3.3 Taxas Proporcionais e Equivalentes

Taxas Proporcionais: Duas taxas são **proporcionais** quando existe entre elas a mesma relação que a dos períodos a que se refere.

Exemplo:

As taxas de 36% a.a. e de 3% a.m. são proporcionais de forma análoga ao juro simples.

Taxas Equivalentes: são aquelas que aplicadas ao **mesmo principal**, durante o **mesmo intervalo de tempo**, produzem **montantes iguais**.

Exemplo:

Um capital de R$100,00 aplicados por 12 meses a uma taxa de juros compostos de 2% a.m. e o mesmo capital aplicado pelo mesmo período a uma taxa de juros compostos de 24% a.a. terão o mesmo montante?

$PV = 100{,}00$	$PV = 100{,}00$
n = 12 meses	n = 1 ano
i = 0,02 a.m.	i = 0,24 a.a.
$FV_{12} = 100 \cdot (1,02)^{12} = 126,82$	$FV_1 = 100 \cdot (1,24)^1 = 124,00$

Como se pode observar, os montantes não são iguais, logo, as taxas de 2% a.m. e 24% a.a. **não são** equivalentes em juros compostos.

IMPORTANTE: ao se calcular o montante, se as unidades de tempo da taxa e do prazo não forem as mesmas, não se pode utilizar taxas proporcionais.

Cálculo da Taxa Equivalente

Seja:
i = taxa anual
k = nº de períodos por ano
i_k = taxa equivalente a i
Faremos os cálculos dos montantes para 1 ano:
$PV(1+i)^1 = PV(1+i_k)^k$
$1+i = (1+i_k)^k$
$\boxed{i = (1+i_k)^k - 1}$

Na prática...
Quando se tem a taxa mensal e se quer a taxa anual, procede-se da seguinte maneira: pega-se a taxa mensal na forma decimal e soma-se 1 a ela. O resultado ao invés de multiplicar por 12, eleva-se na 12ª potência e depois subtrai-se 1.

Da mesma igualdade, temos:
$\boxed{i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1}$

Na prática...
Quando se tem a taxa anual e se quer a taxa equivalente mensal, pega-se a taxa anual na forma decimal e soma-se 1 a ela. Ao invés de dividir por 12, extrai-se uma raiz de índice 12 e depois subtrai-se 1.

Observação: Na fórmula, a variável i se refere ao maior espaço de tempo e a variável i_k se refere a um espaço sempre menor que o de i.

Exemplos:

1. Que taxa de juros anual é equivalente a taxa de 3% a.m.?

Dados:
i = taxa anual = ?
i_k= 3% a.m. = 0,03
k = 12 períodos (meses por ano)

Solução Algébrica:
$i = (1 + i_k)^k - 1$
$i = (1 + 0,03)^{12} - 1$
$i = 1,4258 - 1$
$i = 0,4258$
$i = 42,58\%$ *a.a.*

Na HP-12C:
100 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
3 $\boxed{\text{i}}$
12 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$
142,58
100 $\boxed{-}$
$42,58\%$ *a.a.*

2. Qual é a taxa semestral equivalente a taxa de 40%a.a.?

Dados:
$i = 40\%$ *a.a.* $= 0,40$
i_k = taxa equivalente semestral=?
k = 2 períodos (semestres por ano)

Solução Algébrica:
$i_k = \sqrt[k]{(1+i)} - 1$
$i_2 = \sqrt[2]{(1+0,40)} - 1$
$i_2 = \sqrt[2]{1,40} - 1$
$i_2 = 1,1832 - 1$
$i_2 = 0,1832$
$i_k = 18,32\%$ *a.s.*

Na HP-12C:
100 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
140 $\boxed{\text{FV}}$
2 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{i}}$
$18,32\%$ *a.s.*

3.4 Convenção Linear e Exponencial

Quando o prazo não é um número inteiro em relação a taxa de juros, utiliza-se a convenção linear ou a convenção exponencial para o cálculo do montante, da taxa ou dos juros.

Convenção Linear

Na convenção linear, calcula-se o montante em duas etapas:

1ª etapa: calcula-se o montante referente à parte inteira com capitalização composta.

2ª etapa: calcula-se o montante referente à parte fracionária sobre o valor calculado na 1ª etapa utilizando capitalização simples.

O cálculo do montante na convenção linear é dado por:

$$\boxed{FV = PV \cdot (1+i)^n \cdot \left[1 + i \cdot \tfrac{p}{q}\right]}$$

onde:

$\dfrac{p}{q}$ é a parte fracionária.

Convenção Exponencial

A convenção exponencial utiliza o regime de juros compostos para todo o período, tanto inteiro como fracionário.

O cálculo do montante na convenção exponencial é dado por:

$$\boxed{FV = PV \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}}$$

Observação: Na calculadora HP-12C é necessário que, no visor, embaixo e a direita, apareça a letra "C". Para tal, deve-se pressionar as teclas $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{EEX}}$. Para retirar a letra "C" do visor, pressione essas mesmas teclas. Quando a letra "C" não estiver aparecendo no visor, a HP-12C faz o cálculo na convenção linear.

Cálculos com a HP-12C

1. Um investidor aplica R$ 15.000,00 à uma taxa de 12% a.a., pelo prazo de 3 anos e 9 meses. Calcule o montante através da convenção linear a a seguir através da convenção exponencial.

Dados:
$PV = 15.000{,}00$
$i = 12\%$ a.a. $= 0{,}12$
$n = 3$ anos
$\dfrac{p}{q} = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$ *(fração do ano)*
$FV = ?$

Convenção linear

Solução Algébrica:
$FV = PV \cdot (1+i)^n \cdot \left[1 + i \cdot \frac{p}{q}\right]$
$FV = 15000 \cdot (1+0,12)^3 \cdot [1 + 0,12 \cdot 0,75]$
$FV = 15000 \cdot (1,12)^3 \cdot [1,09]$
FV =R$ 22.970,57

Na HP-12C:			
f	REG		
15000	CHS	PV	
12	i		
3	ENTER		
9	ENTER		
12	÷	+	n
FV			
R$ 22.970,57			

Convenção exponencial

Solução Algébrica:
$FV = PV \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$
$FV = 15000 \cdot (1+0,12)^{3+0,75}$
$FV = 15000 \cdot (1,12)^{3,75}$
FV =R$ 22.943,46

Na HP-12C:			
f	REG		
STO	EEX		
15000	CHS	PV	
12	i		
3	ENTER		
9	ENTER		
12	÷	+	n
FV			
R$ 22.943,46			

2. Arthur utilizou o limite de R$ 1.250,00 de sua conta por 18 dias. O banco cobra juros de 7% a.m. Calcular o valor a ser pago ao banco utilizando as convenções linear e exponencial.
   Dados:
   PV = 1.250,00
   i= 7% a.m. = 0,07
   n = 0 meses
   $\frac{p}{q} = \frac{18}{30}$ = 0,6 *(fração ao mês)*
   FV=?

   Convenção linear

Solução Algébrica:
$FV = PV \cdot (1+i)^n \cdot \left[1 + i \cdot \frac{p}{q}\right]$
$FV = 1250 \cdot (1+0,07)^0 \cdot [1+0,07 \cdot 0,6]$
$FV = 1250 \cdot (1,07)^0 \cdot [1,042]$
FV =R$ 1.302,50

Na HP-12C:
$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$
1250 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
7 $\boxed{\text{i}}$
0 $\boxed{\text{ENTER}}$
18 $\boxed{\text{ENTER}}$
30 $\boxed{\div}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$
R$ 1.302,50

   Convenção exponencial

Solução Algébrica:
$FV = PV \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$
$FV = 1250 \cdot (1+0,07)^{0+0,6}$
$FV = 1250 \cdot (1,07)^{0,6}$
FV =R$ 1.301,79

Na HP-12C:
$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$
$\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{EEX}}$
1250 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
7 $\boxed{\text{i}}$
0 $\boxed{\text{ENTER}}$
18 $\boxed{\text{ENTER}}$
30 $\boxed{\div}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$
R$ 1.301,79

3. Um cliente aplicou R$ 8.000,00 em *LCI* durante 378 dias a uma taxa de 10,5% a.a. Quanto o banco deverá creditar em sua conta? (Utilize a convenção exponencial)

   Dados:
   PV = 8.000,00
   i= 10,5% a.a. = 0,105
   n = 1 ano
   $\frac{p}{q} = \frac{18}{360}$ = 0,05 *(fração do ano)*
   FV=?

   Convenção exponencial

Solução Algébrica:
$FV = PV \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$
$FV = 8000 \cdot (1+0,105)^{1+0,05}$
$FV = 8000 \cdot (1,105)^{1,05}$
FV =R$ 8.884,24

Na HP-12C:
$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$
$\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{EEX}}$
8000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
10,5 $\boxed{\text{i}}$
1 $\boxed{\text{ENTER}}$
18 $\boxed{\text{ENTER}}$
360 $\boxed{\div}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$
R$ 8.884,24

3.5 Valor Atual e Valor Nominal

O valor nominal de um título é o valor do montante de uma aplicação, ou seja, é quanto o título vale no vencimento.

$$FV = PV(1+i)^n$$

O valor atual é a operação inversa do cálculo do montante.

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

3.6 Desconto Composto (D)

O desconto composto corresponde ao abatimento por saldar-se um compromisso antes do vencimento. É obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual de um compromisso que seja saldado n períodos antes do vencimento, calculado o valor atual à taxa de desconto.

Seja FV o valor de um título no vencimento (futuro), o valor atual (PV) dessa dívida será de $PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$ onde i e n são respectivamente a taxa de desconto e o prazo de antecipação. Logo, o desconto D será:
$D = FV - PV$

Cálculos com a HP-12C

1. Um título no valor de R$ 6.500,00 foi saldado 4 meses antes do vencimento. O possuidor do título obteve uma taxa de desconto de 2,5%a.m. Qual o desconto composto e qual a quantia recebida?

Dados:
FV = R$ 6.500,00
n = 4 meses
i = 2,5% a.m = 0,025
D = ?
PV = ?

Solução Algébrica:
$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$
$PV = \frac{6500}{(1{,}025)^4}$
$PV =$ R$ 5.888,68

$D = FV - PV$
$D = 6500 - 5888,68$
$D =$ R$ 611,32

Na HP-12C:
6500 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{FV}}$
4 $\boxed{\text{n}}$
2,5 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PV}}$

R$ 5.888,68

5888,68 $\boxed{\text{CHS}}$
6500 $\boxed{+}$

R$ 611,32

2. A Casa de Carnes *Boi Gordo* tem um cheque pré- datado a receber que vence daqui a 120 dias no valor de R$ 900,00. O

banco cobra uma taxa de desconto composto de 3% a.m. Qual será o valor líquido recebido em tal operação?

Dados:
FV = R$ 900,00
n = 120 dias = 4 meses
i = 3% a.m = 0,03
PV = ?

Solução Algébrica:
$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$
$PV = \frac{900}{(1{,}03)^4}$
$PV =$ R$ 799,64

Na HP-12C:
900 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{FV}}$
4 $\boxed{\text{n}}$
3 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PV}}$
R$ 799,64

3.7 Problemas Propostos

1. Calcular o montante e o juro composto de:

   (a) R$ 750,00 a 3% a.m. durante 4 meses.

   (b) R$ 2.400,00 a 2,7% a.m. durante 2 meses.

   (c) R$ 350,00 a 9%a sem. durante 3 semestres.

2. Se eu quiser comprar um carro no valor de R$ 32.000,00, quanto devo aplicar hoje para que daqui a 2 anos possua tal valor com a taxa de 2%a.m.?

3. Considerando as convenções linear e exponencial, calcular o montante de um capital de R$ 20.000,00, aplicado por 85 dias a uma taxa de 4% a.a.

4. A aplicação de R$ 480.000,00 proporcionou um rendimento de R$ 340.000,00 no final de 230 dias. Determinar as taxas diária e mensal de juros. (Dica: pode ser usada a convenção exponencial)

5. O Sr. Abib usou o limite do cheque especial no valor de R$ 850,00 durante 13 dias. O seu banco cobra a taxa de 5,60% a.m. ou 92,29% a.a.. Então, quanto o Sr. Abib pagou de juros nesse período? (Utilize as convenções linear e exponencial para comparar o valor dos juros pagos)

6. A empresária da "DCS S.A". aplicou um excedente de caixa de R$ 12.500,00 no "Banco Alfa"e resgatou R$ 14.022,28 após 17 meses. Qual foi a taxa anual de juros compostos que foi paga pelo banco neste período?

7. A Transportadora "LOGISK"quer comprar um caminhão novo daqui a um ano e sabe que este deverá custar em torno de R$ 315.000,00. Quanto a transportadora deve depositar hoje em um fundo que paga juros compostos de 1,1% a.m. para compor tal quantia?

8. A empresária da "AMS S.A". aplicou um excedente de caixa de R$ 18.450,00 no "Banco da Terra"e resgatou R$ 22.269,52 após 21 meses. Qual foi a taxa anual de juros compostos que foi paga pelo banco neste período? (Dica: pode ser usada a convenção exponencial)

9. J. K. aplicou R$ 13.000,00 algum tempo atrás e agora resgatou o dobro do valor investido, tendo sido informado que a taxa de juros compostos contratada foi de 2,93% a.m. De quantos anos foi o período de aplicação?

10. O gerente da "CASA DE CARNES SF"descontou uma duplicata a receber no valor de R$ 1.555,00, que vence daqui a 90 dias na Financeira "GMB"onde foi informado que sua taxa efetiva anual de desconto composto era de 79,59% a.a. Qual o valor recebido pelo gerente da casa de carnes? (Utilize a convenção exponencial)

Capítulo 4

Séries de Pagamentos

As séries de pagamentos uniformes são aquelas em que os pagamentos ou recebimentos são constantes e ocorrem em intervalos de tempos iguais.

As séries de pagamentos uniformes se classificam quanto ao vencimento do primeiro pagamento em:

- **Imediata**- quando o primeiro pagamento da série ocorre no primeiro período da série;
- **Diferida**- quando o primeiro pagamento é feito a partir do segundo período da série (período de carência).

Séries Imediatas

As séries imediatas se classificam em:

- **Postecipada-** quando os pagamentos ocorrem no período "1"(um) da série.
- **Antecipada-** quando o primeiro pagamento ocorre no momento "0"(zero) da série;

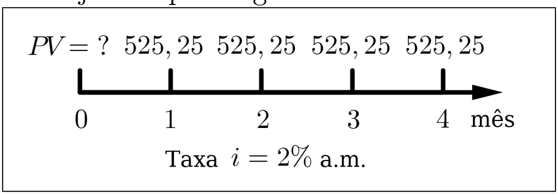
4.1 Séries Imediatas Postecipadas

São as séries que são simultaneamente: *temporárias, periódicas, fixas, imediatas* e *postecipadas* e que a taxa seja referida ao mesmo período dos pagamentos. As séries uniformes postecipadas são aquelas em que o primeiro pagamento ocorre no momento 1 da série (0+n).

Valor Presente de uma Série Postecipada

Exemplo motivador: Uma pessoa compra uma TV que, irá pagar em 4 prestações mensais de R$ 525,25 sem entrada. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor afirmou estar cobrando uma taxa de juros compostos de 2%a.m. Pergunta-se o valor da TV a vista.

Veja o esquema gráfico:



A soma dos valores atuais PV é:

$$PV = \frac{525,25}{1,02} + \frac{525,25}{1,02^2} + \frac{525,25}{1,02^3} + \frac{525,25}{1,02^4}$$

$$PV = 525,25\left[\frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \frac{1}{1,02^4}\right] \dashrightarrow \text{pôr em evidência 525,25}$$

$PV = 525,25[0,980392 + 0,961169 + 0,942322 + 0,923845]$

$PV = 525,25[3,807729]$

$PV = 2000,01$
Conclui-se que o preço da TV à vista é de R$2000,01.

Pode-se notar que o valor a vista da TV foi obtido multiplicando-se a prestação por um fator constante que depende apenas da taxa de juros e do número de parcelas do financiamento e que a soma (entre colchetes) é de termos de uma progressão geométrica (PG) finita onde:

$$a_1 = \frac{1}{1,02}, \qquad a_4 = \frac{1}{1,02^4} \quad e \quad q = \frac{1}{1,02}$$

Na verdade, esse fator, denominado por Teixeira e Netto (1998) de **Fator de Valor Presente por Operação Múltipla (FVPm)**, pode ser generalizado para qualquer taxa e número de parcelas, utilizando para isso a fórmula do somatório dos termos de uma PG finita. Sendo assim, temos:

$a_1 = \dfrac{1}{1+i},\ a_n = \dfrac{1}{(1+i)^n},\ q = \dfrac{1}{1+i}\ e$

$S_n = FVP_m = \dfrac{a_1 - a_n.q}{1-q}$

Então:

$$FVP_m = \frac{\dfrac{1}{(1+i)} - \dfrac{1}{(1+i)^n} \cdot \dfrac{1}{(1+i)}}{1 - \dfrac{1}{(1+i)}}$$

onde fazendo as simplificações temos:

$$\boxed{[FVP_m]_i^n = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}\right]}$$

Ou seja, para se encontrar o valor presente PV (ou valor a vista) de uma série de pagamentos basta multiplicar o valor da prestação PMT pelo $[FVP_m]_i^n$.

$$\boxed{PV = PMT \cdot [FVP_m]_i^n}$$

onde:

- PV é o valor a vista
- PMT é o valor da prestação
- n é o número de parcelas
- i é a taxa

Observações:

1. No Apêndice C está disponibilizada uma tabela financeira que já traz calculado o valor do $[FVP_m]_i^n$ para algumas taxas e número de parcelas.

2. Na HP-12C, os pagamentos postecipados são considerados no fim do primeiro período, logo deve ser utilizada a tecla $\boxed{\text{END}}$ (fim).

Cálculos com a HP-12C

1. Qual é o valor atual de uma série de pagamentos periódica de R$100,00 mensais à uma taxa de 2% a.m. no prazo de 24 meses cujo primeiro pagamento é feito no momento 1 da série?

Dados:
PMT = R$ 100,00
i = 2% a.m = 0,02
n = 24 mensais
PV = ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:

$PV = PMT \cdot [FVP_m]_i^n$

$PV = 100 \cdot [FVP_m]_{i=2\%}^{n=24}$

$PV = 100 \cdot 18,91393$

$PV =$ R$ 1.891,39

Na HP-12C:

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$

100 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$

2 $\boxed{\text{i}}$

24 $\boxed{\text{n}}$

$\boxed{\text{PV}}$

R$ 1.891,39

Observação: *Veja as Teclas* $\boxed{f}$ *e* $\boxed{g}$ *no Apêndice A.*

2. O preço de um carro à vista é de R$ 15.000,00 e será pago em 12 prestações mensais iguais, sem entrada e a primeira parcela será paga um mês após a compra. Considerando que a taxa de juros na compra do carro usado é de 3% a.m., calcule o valor de cada prestação.

Dados:
PV = R$ 15.000,00
n = 12 mensais
i = 3% a.m = 0,03
PMT = ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:

$PMT = \frac{PV}{[FVP_m]_i^n}$

$PMT = \frac{15000}{[FVP_m]_{i=3\%}^{n=12}}$

$PMT = \frac{15000}{9,95400}$

$PMT =$ R$ 1.506,93

Na HP-12C:

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$

15000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$

12 $\boxed{\text{n}}$

3 $\boxed{\text{i}}$

$\boxed{\text{PMT}}$

R$ 1.506,93

3. Um DVD é vendido a vista por R$ 269,00 ou a prazo em 5 parcelas de R$ 58,74. Descubra a taxa de juros mensais nessa negociação.

Dados:
PV = R$ 269,00
PMT = R$ 58,74
n = 5 mensais
i = ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:

$PV = PMT \cdot [FVP_m]_i^n$

$269 = 58,74 \cdot [FVP_m]_i^{n=5}$

$[FVP_m]_i^{n=5} = \frac{269}{58,74}$

$[FVP_m]_i^{n=5} = 4,57950$

Com o auxílio da tabela $[FVP_m]_i^n$ do Apêndice C, procura-se na linha $n = 5$ qual a taxa mais aproximada ou igual ao fator calculado.

$i = 3\%$ a.m

Na HP-12C:

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$

269 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$

58,74 $\boxed{\text{PMT}}$

5 $\boxed{\text{n}}$

$\boxed{\text{i}}$

3% a.m

4. João comprou uma loja, cujo valor a vista é R$ 300.000,00, em prestações mensais de R$ 19.676,05, sem entrada. João achou que fez bom negócio pois mesmo com a taxa de 4% a.m., o valor do investimento mensal era baixo. Um amigo perguntou em quantas prestações comprara e João não soube responder. Calcule o número de prestações.

Dados:
PV = R$ 300.000,00
PMT = R$ 19.676,05
i = 4% a.m
n = ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:
$PV = PMT \cdot [FVP_m]_i^n$
$300000 = 19676,05 \cdot [FVP_m]_{i=4\%}^n$
$[FVP_m]_{i=4\%}^n = \frac{300000}{19676,05}$
$[FVP_m]_{i=4\%}^n = 15,24696$
Com o auxílio da tabela $[FVP_m]_i^n$ do Apêndice C, procura-se na coluna $i = 4\%$ qual o prazo mais aproximado ou igual ao fator calculado.

$n = 24$ meses

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$
300000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
19676,05 $\boxed{\text{PMT}}$
4 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{n}}$

24 mensais

Valor Presente de Séries Postecipadas com Entrada Diferente das Parcelas

Ainda podemos ter uma série de pagamentos com uma entrada E de valor diferente da parcela e desta forma, temos:

$$\boxed{PV = E + PMT \cdot [FVP_m]_i^n} \quad \text{e} \quad \boxed{PMT = \frac{PV - E}{[FVP_m]_i^n}}$$

Cálculos com a HP-12C

1. JCL quer comprar uma TV de plasma que custa à vista na LOJA POÁ R$ 4.200,00. Para tal dará uma entrada de R$ 1.200,00 e o restante fará em 18 parcelas mensais e iguais sendo a primeira paga um mês após a compra. Sabendo que a loja cobra juros de 3% a.m. para esse tipo de financiamento, qual o valor de cada prestação?

Dados:
PV = R$ 4.200,00
n = 18 mensais
i = 3% a.m = 0,03
PMT = ?
E = R$ 1.200,00
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:
$PMT = \frac{PV-E}{[FVP_m]_i^n}$
$PMT = \frac{4200-1200}{[FVP_m]_{i=3\%}^{n=18}}$
$PMT = \frac{3000}{13,75351}$
$PMT =$ R$ 218,13

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$
4200 $\boxed{\text{ENTER}}$
1200 $\boxed{\text{-}}$
3000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
18 $\boxed{\text{n}}$
3 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PMT}}$
R$ 218,13

2. Qual o valor a vista de uma moto cujas 30 parcelas foram de R$158,21 e teve uma entrada de R$ 500,00 e a taxa do financiamento foi de 1% a.m.?

Dados:
PV = ?
n = 30 mensais
i = 1% a.m = 0,01
PMT = R$ 158,21
E= R$ 500,00
POSTECIP.→END

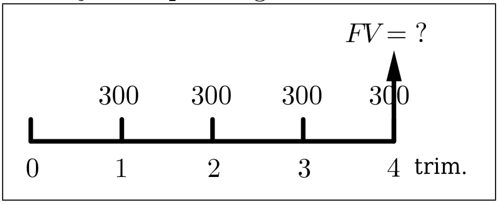
Solução Algébrica:
$PV = E + PMT \cdot [FVP_m]_i^n$
$PV = 500 + 158,21 \cdot [FVP_m]_{i=1\%}^{n=30}$
$PV = 500 + 158,21 \cdot 25,80771$
$PV = 500 + 4083,04$
$PV =$ R$ 4.583,04

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$
158,21 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$
30 $\boxed{\text{n}}$
1 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PV}}$
4083,04 $\boxed{\text{ENTER}}$
500 $\boxed{+}$
R$ 4.583,04

Montante de uma Série Postecipada

Exemplo motivador: JH Silva fez uma aplicação em um plano de capitalização onde fará 4 depósitos trimestrais no valor de R$300,00 cada. A taxa nessa aplicação é de 5% a.trim e o cliente faz o primeiro depósito 1 trimestre após a abertura da conta.

Veja o esquema gráfico:



Qual será o montante FV dessa aplicação?

Temos de encontrar todos os montantes na data 4 e somá los:

$FV = 300 + 300(1,05) + 300(1,05)^2 + 300(1,05)^3$
$FV = 300[1 + (1,05) + (1,05)^2 + (1,05)^3]$
$FV = 300[1 + 1,05 + 1,1025 + 1,157625]$
$FV = 300[4,310125]$
$FV = 1293,04$

Concluímos que o montante dessa aplicação é de R$ 1293,04.

É notável que o montante foi obtido multiplicando-se o valor do depósito por um fator constante que depende apenas da taxa e do número de depósitos e que a soma (entre colchetes) é também de termos de uma progressão geométrica (PG) finita onde:

$$a_1 = 1 \qquad a_4 = (1,05)^3 \qquad q = (1,05)$$

Esse fator, denominado por Teixeira e Netto (1998) de **Fator de Acumulação de Capitais por Operação Múltipla (FACm)**, pode ser generalizado para qualquer taxa e número de parcelas, utilizando a fórmula do somatório dos termos de uma PG finita. Sendo assim, temos:

$$a_1 = 1, \quad a_n = (1+i)^{n-1}, \quad q = (1+i) \text{ e}$$

substituindo na fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita, temos:

$$S_n = FAC_m = \frac{a_1 - a_n.q}{1-q}$$

Então:

$$FAC_m = \frac{1-(1+i)^{n-1}.(1+i)}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i}$$

$$\boxed{FAC_m = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Logo, para encontrar o montante FV de uma série de pagamentos basta multiplicar o valor da parcela PMT pelo FAC_m.

$$\boxed{FV = PMT \cdot [FAC_m]_i^n}$$

onde:

- FV é o montante
- PMT é o valor da parcela
- n é o número de parcelas
- i é a taxa de juros

Observação: No Apêndice B está disponibilizada uma tabela financeira que já traz calculado o valor do $[FAC_m]_i^n$ para algumas taxas e número de parcelas.

Cálculos com a HP-12C

1. Uma pessoa deposita R$ 500,00 mensalmente em um banco que remunera o capital à taxa de 2% a.m. Pergunta-se quanto possuirá em 2 anos?

Dados:
PMT = R$ 500,00
i = 2% a.m = 0,02
n = 2 anos = 24 mensais
FV = ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:

$FV = PMT \cdot [FAC_m]_i^n$

$FV = 500 \cdot [FAC_m]_{i=2\%}^{n=24}$

$FV = 500 \cdot 30,42186$

$FV =$ R$ 15.210,93

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$
500 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$
2 $\boxed{\text{i}}$
24 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$

R$ 15.210,93

2. Preciso juntar R$ 20.000,00 no prazo de 20 meses. Se fizer depósitos mensais durante este prazo em uma caderneta de poupança de um banco que paga uma taxa de 1% a.m., qual deverá ser o valor de cada depósito sendo o primeiro depósito feito um mês após a abertura da conta?

Dados:
FV = R$ 20.000,00
n = 20 meses
i = 1% a.m = 0,01
PMT= ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:

$PMT = \frac{FV}{[FAC_m]_i^n}$

$PMT = \frac{20000}{[FAC_m]_{i=1\%}^{n=20}}$

$PMT = \frac{20000}{22,01900}$

$PMT =$ R$ 908,31

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$
20000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{FV}}$
20 $\boxed{\text{n}}$
1 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PMT}}$

R$ 908,31

3. O Sr. JLP depositou mensalmente R$ 170,00 numa aplicação que paga juros de 3% a.m. e acumulou R$ 8.087,82. Descubra quantos depósitos JLP fez?

Dados:	Solução Algébrica:	Na HP-12C:
PMT = R$ 170,00 i = 3% a.m = 0,03 FV = R$ 8.087,82 n = ? POSTECIP.→END	$FV = PMT \cdot [FAC_m]_i^n$ $[FAC_m]_{i=3\%}^n = \frac{FV}{PMT}$ $[FAC_m]_{i=3\%}^n = \frac{8087{,}82}{170}$ $[FAC_m]_{i=3\%}^n = 47,5754$ Pela tabela $[FAC_m]_i^n$	$\boxed{g}$ $\boxed{END}$ 170 $\boxed{CHS}$ $\boxed{PMT}$ 3 $\boxed{i}$ 8.087,82 $\boxed{FV}$ $\boxed{n}$
	n = 30 parcelas mensais	30 parcelas mensais

Montante de uma Série com Entrada Diferente dos Depósitos

Se na abertura da conta de um plano de capitalização, o cliente fizer um depósito inicial de valor diferente das parcelas, o montante será dado pela fórmula:

$$\boxed{FV = E \cdot (1+i)^n + PMT \cdot [FAC_m]_i^n}$$

Cálculo com a HP-12C

1. Um fundo de renda fixa paga juros de 2% a.m. Um investidor fez um depósito inicial de R$ 2.000,00 mais 15 depósitos mensais iguais e consecutivos de R$ 800,00. Qual foi o montante acumulado no final desse período?

   Dados:
   i = 2% a.m = 0,02
   E = R$ 2.000,00
   PMT = R$ 800,00
   n = 15 mensais
   FV = ?
   POSTECIP.→END

Solução Algébrica:
$FV = E \cdot (1+i)^n + PMT \cdot [FAC_m]_i^n$
$FV = 2000 \cdot (1,02)^{15} + 800 \cdot [FAC_m]_{i=2\%}^{n=15}$
$FV = 2000 \cdot 1,34587 + 800 \cdot [17,293417]$
$FV = 2691,74 + 13834,73$
$FV =$ R$ 16.526,47

Na HP-12C:
g END
2000 CHS PV
800 CHS PMT
15 n
2 i
FV
R$ 16.526,47

2. Amorim investiu em um plano de capitalização R$432,50 mensais durante 3 anos. Além disso, quando fez a abertura do plano fez um depósito inicial de R$ 1.500,00 e acumulou um montante de R$20.776,90. Qual a taxa de juros desse plano?

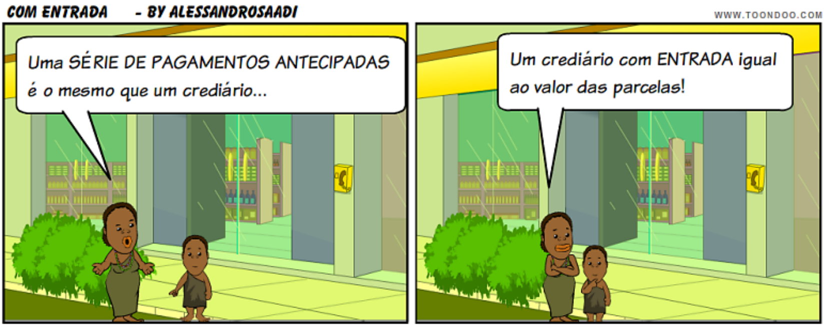
Dados:
PMT = R$ 432,50
n = 3 anos = 36 mensais
E = R$ 1.500,00
FV = R$ 20.776,90
i = ?
POSTECIP.→END

Solução Algébrica:
Para encontrar a taxa em um financiamento com 'n' parcelas, é necessário resolver uma equação de grau 'n', que muitas vezes é utilizado métodos iterativos onde se perde muito tempo, por isso será mostrada a solução na HP-12C

Na HP-12C:
g END
432,50 CHS PMT
1500 CHS PV
36 n
20776,90 FV
i
1% a.m

4.2 Séries Imediatas Antecipadas

São séries do tipo: *temporárias, periódicas, fixas, imediatas* e *antecipadas* e que a taxa seja referida ao mesmo período dos pagamentos. As séries antecipadas são aquelas em que o primeiro pagamento ocorre no momento 0 da série, isto é, a primeira parcela, de mesmo valor das outras, é dada como entrada.



Valor Presente de uma Série Antecipada

O valor presente ou preço a vista, é dado pela fórmula:

$$\boxed{PV = PMT \cdot (1+i) \cdot [FVP_m]_i^n}$$

Para encontrar o valor de cada prestação a fórmula matemática é:

$$\boxed{PMT = \frac{PV}{(1+i) \cdot [FVP_m]_i^n}}$$

Na HP-12C, os pagamentos antecipados são considerados no início do primeiro período, logo deve ser utilizada a tecla $\boxed{\text{BEG}}$ (início).

Cálculos com a HP-12C

1. Uma dona de casa compra uma TV em 24 prestações de R$ 630,64, sendo que a primeira é dada como entrada. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 4% a.m., qual seria o valor da TV a vista?

Dados:
n = 24 meses
PMT = R$ 630,64
i = 4% a.m = 0,04
PV = ?
ANTECIP.→BEG

Solução Algébrica:

$PV = PMT \cdot [FVP_m]_i^n \cdot (1+i)$

$PV = 630,64 \cdot [FVP_m]_{i=4\%}^{n=24} \cdot (1,04)$

$PV = 630,64 \cdot [15,24696] \cdot (1,04)$

$PV =$ R$ 9.999,96

Na HP-12C:

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{BEG}}$

630,64 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$

4 $\boxed{\text{i}}$

24 $\boxed{\text{n}}$

$\boxed{\text{PV}}$

R$ 9.999,96

2. Uma moto é vendida a vista por R\$ 4.500,00 ou em 5 prestações mensais, sendo a primeira dada no ato da compra como entrada. Calcule o valor de cada prestação sabendo que a taxa de juros é de 5% a.m.

Dados:
PV = R\$ 4.500,00
n = 5 mensais
i = 5% a.m = 0,05
PMT = ?
ANTECIP.→BEG

Solução Algébrica:
$PMT = \frac{PV}{[FVP_m]_i^n \cdot (1+i)}$
$PMT = \frac{4500}{[FVP_m]_{i=5\%}^{n=5} \cdot (1+0{,}05)}$
$PMT = \frac{4500}{4{,}32948 \cdot (1{,}05)}$
$PMT = \frac{4500}{4{,}54595}$
$PMT =$ R\$ 989,89

Na HP-12C:
$\boxed{g}$ $\boxed{\text{BEG}}$
4500 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
5 $\boxed{i}$
5 $\boxed{n}$
$\boxed{\text{PMT}}$
R\$ 989,89

3. Dr. Joaquim comprou um carro novo que custa a vista R\$ 35.400,00 em 24 parcelas mensais de R\$ 1.649,90, sendo a primeira parcela dada como entrada. Qual a taxa de juros mensal cobrada?

Dados:
PV = R\$ 35.400,00
n = 24 mensais
PMT = R\$ 1.649,90
i = ?
ANTECIP.→BEG

Solução Algébrica:
Para encontrar a taxa em um financiamento com 'n' parcelas, é necessário resolver uma equação de grau 'n', que muitas vezes é utilizado métodos iterativos onde se perde muito tempo, por isso será mostrada a solução na HP-12C

Na HP-12C:
$\boxed{g}$ $\boxed{\text{BEG}}$
35400 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
1649,90 $\boxed{\text{PMT}}$
24 $\boxed{n}$
$\boxed{i}$
1% a.m

Montante de uma Série Antecipada

O montante de uma série antecipada, é dado pela fórmula:

$$\boxed{FV = PMT \cdot (1+i) \cdot [FAC_m]_i^n}$$

Para encontrar o valor de cada depósito, a fórmula matemática é a seguinte:

$$\boxed{PMT = \frac{FV}{(1+i)\cdot[FAC_m]_i^n}}$$

Cálculos com a HP-12C

1. Felipe fez uma aplicação em um plano de capitalização que paga 1% a.m.. Ele fez 24 depósitos mensais de R$ 360,00 sendo o primeiro na abertura do plano. Qual o valor acumulado depois do último depósito?

Dados:
i = 1% a.m = 0,01
n = 24 meses
PMT = R$ 360,00
FV = ?
ANTECIP.→BEG

Solução Algébrica:

$FV = PMT \cdot [FAC_m]_i^n \cdot (1+i)$

$FV = 360 \cdot [FAC_m]_{i=1\%}^{n=24} \cdot (1,01)$

$FV = 360 \cdot [26,9735] \cdot (1,01)$

$FV =$ R$ 9.807,55

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{BEG}}$
360 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$
1 $\boxed{\text{i}}$
24 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{FV}}$

R$ 9.807,55

2. O diretor da Empresa KPA resolve fazer um plano de capitalização no Banco AMF, que paga a taxa de 1,5%a.m. para plano de depósitos de 60 meses, sendo o primeiro depósito feito no momento de abertura da conta. De quanto deve ser o valor de cada depósito para que o valor acumulado no final do plano seja de R$33.675,13?

Dados:
i = 1,5% a.m = 0,015
n = 60 meses
FV = R$ 33.675,13
PMT = ?
ANTECIP.→BEG

Solução Algébrica:

$PMT = \frac{FV}{[FAC_m]_i^n \cdot (1+i)}$

$PMT = \frac{33675,13}{[FAC_m]_{i=1,5\%}^{n=60} \cdot (1,015)}$

$PMT = \frac{33675,13}{\left[\frac{(1,015)^{60}-1}{0,015}\right] \cdot (1,015)}$

$PMT = \frac{33675,13}{97,65787}$

$PMT =$ R$ 344,83

Na HP-12C:
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{BEG}}$
33675,13 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{FV}}$
1,5 $\boxed{\text{i}}$
60 $\boxed{\text{n}}$
$\boxed{\text{PMT}}$

R$ 344,83

4.3 Séries Diferidas

Como foi definido anteriormente, as séries diferidas são aquelas em que os pagamentos são exigíveis, pelo menos a partir do segundo período, isto é, o 1º pagamento é exigível a partir de um certo período de carência. Deve-se lembrar que o prazo de carência é o prazo em que não se paga nenhuma prestação, por exemplo, se o prazo de carência for de 5 meses, a primeira parcela será paga no 6º mês.

Cálculo do Valor Presente

Quando são dados a taxa i, o valor da prestação PMT, o número de parcelas n e o período de carência c, é possível calcular o valor presente PV em uma série diferida através da seguinte fórmula:

$$\boxed{PV = \frac{PMT \cdot [FVP_m]_i^n}{(1+i)^c}}$$

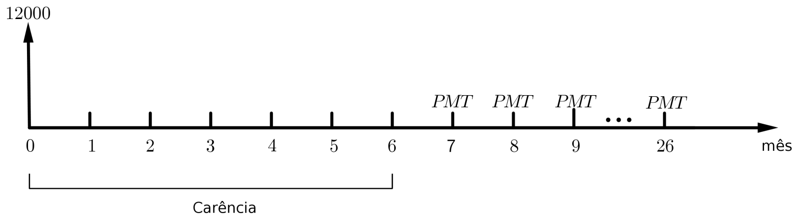
Cálculo da Prestação

Quando são dados a taxa i, o valor presente PV, o número de parcelas n e o período de carência c, é possível calcular o valor da prestação PMT em uma série diferida através da seguinte fórmula:

$$\boxed{PMT = \frac{PV \cdot (1+i)^c}{[FVP_m]_i^n}}$$

Cálculos com a HP-12C

1. O Grupo AFK tomou emprestado uma quantia de R$ 12.000,00 para pagar em 20 prestações mensais iguais, com um prazo de carência de 6 meses, sendo a taxa de juros da financeira de 2% a.m.. Pergunta-se qual será o valor de cada prestação?



Dados:
PV = R$ 12.000,00
n = 20 mesais
c = 6 meses
i = 2% a.m = 0,02
PMT = ?

Solução Algébrica:

$$PMT = \frac{PV \cdot (1+i)^c}{[FVP_m]_i^n}$$

$$PMT = \frac{12000 \cdot (1,02)^6}{[FVP_m]_{i=2\%}^{n=20}}$$

$$PMT = \frac{12000 \cdot 1,12616}{16,35143}$$

$$PMT = \frac{13513,95}{16,35143}$$

$PMT =$ R$ 826,47

Na HP-12C:

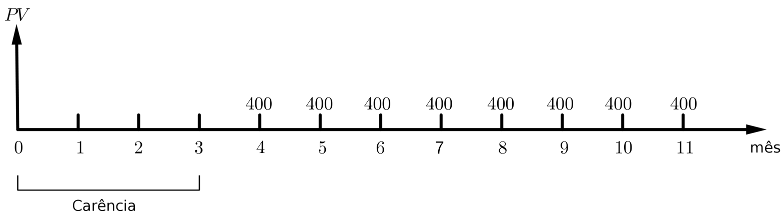
$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$
12000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
6 $\boxed{\text{n}}$
2 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{FV}}$

R$ 13.513,95

13513,95 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$
0 $\boxed{\text{FV}}$
20 $\boxed{\text{n}}$
2 $\boxed{\text{i}}$
$\boxed{\text{PMT}}$

R$ 826,47

2. Uma máquina é vendida a prazo através de 8 prestações mensais de R$ 400,00, com uma carência de 3 meses. Determine o preço a vista, se a taxa de juros for de 5% a.m..



Dados:
PMT = R$ 400,00
n = 8 mesais
c = 3 meses
i = 5% a.m = 0,05
PV = ?

Solução Algébrica:

$$PV = \frac{PMT \cdot [FVP_m]_i^n}{(1+i)^c}$$

$$PV = \frac{400 \cdot [FVP_m]_{i=5\%}^{n=8}}{(1,05)^3}$$

$$PV = \frac{400 \cdot 6,46321}{1,157625}$$

$$PV = \frac{2585,29}{1,157625}$$

$PV =$ R$ 2.233,27

Na HP-12C:

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{END}}$

400 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$

8 $\boxed{\text{n}}$

5 $\boxed{\text{i}}$

$\boxed{\text{PV}}$

R$ 2.585,29

$\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{FV}}$

3 $\boxed{\text{n}}$

0 $\boxed{\text{PMT}}$

$\boxed{\text{PV}}$

R$ 2.233,27

4.4 Problemas Propostos

1. Qual é o preço a vista de uma mercadoria cuja prestação mensal é de R$ 30,00 se a taxa for de 3%a.m. e o prazo de 18 meses e o crediário foi sem entrada?

2. Qual é o valor da prestação mensal de um refrigerador que custa R$ 1.000,00 a vista se a taxa de juros for de 2%a.m. e o prazo de 24 meses?

3. Uma loja vende uma TV em 12 prestações mensais de R$ 97,49 ou em 24 prestações mensais de R$61,50. Nos dois casos o cliente não dará entrada alguma. Sabendo-se que a taxa de juros de crédito pessoal é de 2,5%a.m., pergunta-se qual é o melhor sistema para o comprador?

4. A Loja INFO S.A. vende o computador KDL por R$ 2.000,00 a vista ou financiado em 18 meses, a juros de 3,5%a.m. Qual será a prestação mensal, se não for dada nenhuma entrada e a primeira prestação vencer após 1 mês?

5. A Imobiliária *Kaza* vende um apartamento por R$ 150.000,00. Como alternativas a seus clientes, oferece dois planos de financiamento:

   Plano A: Entrada de R$ 50.000,00 mais 4 prestações trimestrais de R$ 31.600,00;

   Plano B: Entrada de R$ 30.000,00 mais 8 prestações trimestrais de R$23.000,00.

   O Sr. João Granaforte, capitalista que aplica seu dinheiro a 10%a.t., deseja saber qual é a sua melhor opção de compra?

6. João comprou uma casa, cujo valor a vista é R$ 30.000,00, em prestações mensais de R$ 1.326,06, sem entrada. João achou que fez bom negócio pois mesmo com a taxa de 4%a.m., o valor da prestação era baixo. Um amigo perguntou em quantas prestações comprara e João não soube responder. Calcule o número de prestações.

7. O preço a vista de um barco é de R$ 500.000,00. Carlos comprou o barco por R$ 200.000,00 de entrada e mais 12 prestações mensais de R$ 33.847,62. Qual é a taxa de juros cobrada?

8. O pai de um estudante efetua mensalmente, durante 36 meses depósitos de R$ 200,00 em um banco a uma taxa de 2%a.m. Este dinheiro destinase ao custeio dos estudo de seu filho. Qual será o montante acumulado após o último depósito?

9. Qual é o depósito trimestral durante 4 anos consecutivos que produz o montante de R$ 200.000,00 após o último depósito a uma taxa de 5%a.t.?

10. O Grupo BCS pretende depositar todo final de ano, durante 20 anos, R$ 10.000,00 em un fundo que rende juros efetivos de 15%a.a. O montante acumulado deverá ser resgatado a partir do 21º ano por meio de três saques anuais iguais e consecutivos. Calcular o valor dos saques.

11. Em quantos meses uma pessoa acumula um capital de R$ 12.000,00 depositando R$ 493,88 todo fim de mês em uma aplicação financeira que rende juros efetivos de 2% a.m.?

12. O Prof Sabitudo, ao comprar um carro cujo valor à vista é de R$ 14.000,00, teve o seu usado avaliado em R$ 6.000,00 e aceito como entrada. O saldo será pago em 20 parcelas mensais e iguais a juros efetivos de 6% a.m. Calcular o valor da prestação mensal considerando que a primeira parcela será paga um mês após a compra.

13. A Empresa KPA compra um carro em 24 prestações mensais de R$ 630,64, sendo que a primeira prestação foi dada como entrada. A taxa utilizada pela financeira é de 4%a.m. Perguntase qual seria o valor do carro a vista?

14. O diretor da Empresa KPA resolve fazer um plano de capitalização no Banco AMF, que paga a taxa de 1,5%a.m. para plano de depósitos de 60 meses, sendo a primeira prestação paga no momento de abertura da conta. O valor de cada depósito é de R$ 350,00 Perguntase qual será o valor acumulado no final do plano?

15. Uma moto é vendida a vista por R$ 4.500,00 ou em 5 prestações mensais, sendo a primeira dada no ato da compra como entrada. Calcule o valor de cada prestação sabendo que a taxa de juros é de 5%a.m.

16. Calcule o valor da prestação mensal de uma série de pagamentos diferida de 4 meses, exigíveis em nove pagamentos à taxa de 6%a.m., cujo valor a vista é de R$ 2.600,00.

17. Determine o valor atual de uma série diferida de 4 meses, cujos pagamentos são de valor R$ 2.500,00 exigíveis durante 18 meses à taxa de 36%a.a. capitalizada mensalmente.

18. Um carro modelo popular é vendido a vista por R$ 20.400,00. Mas a revenda faz um plano de pagamento alternativo: o

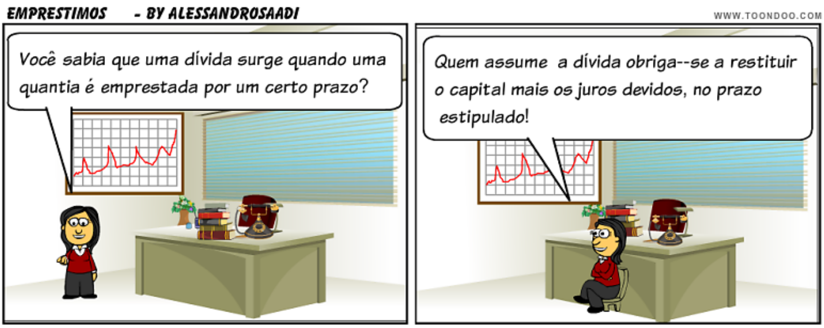
cliente dá uma entrada de 30% do valor do carro e tem uma carência de 6 meses para pagar as 24 prestações mensais. A revenda utiliza a taxa de 2%a.m. neste tipo de financiamento. Calcule o valor de cada prestação.

19. Uma casa é posta a venda por R$ 500.000,00 a vista. Financiada, ela é vendida por 50% de entrada e o restante em 48 prestações mensais a juros de 2,5% a.m. Tendo encontrado dificuldade em vendê-la, o construtor resolveu também financiar 80% do valor referente à entrada, facilitando em 4 parcelas trimestrais iguais, à mesma taxa de juro. Qual é o valor da entrada, da parcela trimestral e da prestação mensal?

Capítulo 5

Empréstimos

5.1 Amortização de Empréstimos



Os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo. Os empréstimos de curto e médio prazo caracterizamse por serem saldados em até 3 anos.

Os empréstimos de longo prazo sofrem um tratamento especial porque existem várias modalidades de restituição do capital e juros. Por motivos didáticos e imposições jurídico-contábeis, os empréstimos de longo prazo são apresentados em **planilhas** em que o saldo devedor, as amortizações, os juros e as prestações recebem destaque especial.

Alguns conceitos básicos:

- **Saldo Devedor:** (SD_k) Situação da dívida no momento k. É a diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período.

- **Amortização:** (A_k) Pagamento do principal nos prazos estipulados.

- **Juros:** (J_k) Porcentagem do capital que se paga ao credor por período, como preço do crédito. Os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor do período imediatamente anterior.

- **Prestação:** (PMT_k) É a soma da amortização com os juros do período.

5.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Nesse sistema, as parcelas de amortização são iguais entre si. Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente no período anterior. O valor da amortização é calculado através da divisão entre o capital inicial e o número de prestações a serem pagas. As prestações são continuamente decrescentes.

Observações gerais:

1. Os **juros** são obtidos sobre o saldo devedor anterior ao período de apuração do resultado;

2. A **prestação** é a soma da amortização aos juros calculados no período;

3. O **saldo devedor** é a diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização.

Exemplo: Uma empresa contrai um empréstimo de R$100.000,00 à taxa de 10%a.a. para ser pago em 5 anos. Monte a planilha desse empréstimo utilizando o Sistema de Amortização Constante (SAC).

- Dados:
  i = 10% a.a = 0,1
  n = 5 anos
  PV = R$ 100.000,00
  PMT = ?

- Cálculo da Amortização (A_k):
  $A_k = \dfrac{PV}{n}$
  $A_k = \dfrac{100000,00}{5} = 20000,00$
  OBS.: As amortizações serão todas iguais a R$ 20000,00.

- Cálculo do Saldo Devedor (SD_k)
  $SD_k = SD_{k-1} - A_k$
  $SD_0 = 100000,00$
  $SD_1 = 100000,00 - 20000,00 = 80000,00$
  $SD_2 = 80000,00 - 20000,00 = 60000,00$
  $SD_3 = 60000,00 - 20000,00 = 40000,00$
  $SD_4 = 40000,00 - 20000,00 = 20000,00$
  $SD_5 = 20000,00 - 20000,00 = 0,00$

- Cálculo dos Juros (J_k)
  $J_k = i \cdot SD_{k-1}$
  $J_1 = 0,1 \cdot 100000,00 = 10000,00$
  $J_2 = 0,1 \cdot 80000,00 = 8000,00$
  $J_3 = 0,1 \cdot 60000,00 = 6000,00$
  $J_4 = 0,1 \cdot 40000,00 = 4000,00$
  $J_5 = 0,1 \cdot 20000,00 = 2000,00$

- Cálculo da Prestação (PMT_k)
  $PMT_k = A_k + J_k$
  $PMT_1 = 20000,00 + 10000,00 = 30000,00$

$PMT_2 = 20000,00 + 8000,00 = 28000,00$
$PMT_3 = 20000,00 + 6000,00 = 26000,00$
$PMT_4 = 20000,00 + 4000,00 = 24000,00$
$PMT_5 = 20000,00 + 2000,00 = 22000,00$

- Planilha desse empréstimo:

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	100.000,00	–	–	–
1	80.000,00	20.000,00	10.000,00	30.000,00
2	60.000,00	20.000,00	8.000,00	28.000,00
3	40.000,00	20.000,00	6.000,00	26.000,00
4	20.000,00	20.000,00	4.000,00	24.000,00
5	0,00	20.000,00	2.000,00	22.000,00
Total	–	100.000,00	30.000,00	130.000,00

5.3 Sistema de Amortização Francês (SAF)

No Sistema de Amortização Francês as prestações são iguais entre si, periódicas e calculadas de tal modo que uma parte paga os juros e a outra, o principal. A dívida fica completamente saldada na última prestação.

Devem ser resolvidos dois problemas:

- Como calcular a prestação;
- Como separar a amortização dos juros.

Procedimento para a construção da planilha:

1º) Calcula-se a prestação PMT_k;

2º) Calcula-se para cada período (k) os juros sobre o saldo devedor do período anterior:
$J_k = i \cdot SD_{k-1}$

3º) Para obter o valor da amortização, fazemos a diferença entre a prestação e o juro:
$A_k = PMT_k - J_k$

4º) O saldo devedor do período será a diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período:
$SD_k = SD_{k-1} - A_k$

Exemplo: Uma empresa pega emprestado R\$100.000,00, no banco BCM que utiliza o Sistema de Amortização Francês (SAF), taxa de 10%a.a. e quer a devolução em 5 prestações anuais. Construir a planilha de amortização desse empréstimo.

- Dados:
  i = 10% a.a = 0,1
  n = 5 anos
  PV = R\$ 100.000,00
  PMT = ?

- Como calcular a prestação PMT_k:
  $$PMT_k = \frac{PV}{[FVP_m]_i^n}$$
  $$PMT_k = \frac{100000}{[FVP_m]_{i=10\%}^{n=5}}$$
  $$PMT_k = \frac{100000}{3,79079}$$
  $$PMT_k = 26379,75$$

- Montagem da Planilha Usando a HP-12C.
  Vamos utilizar a função amarela AMORT que permite o desdobramento das prestações PMT em amortizações e juros. Com essas funções, poderemos calcular, também o total dos juros e amortizações entre duas prestações. Logo, o presente problema pode ser resolvido como segue:
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

  100000,00 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$ 10 $\boxed{\text{i}}$ 5 $\boxed{\text{n}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ 26379,75

  1 $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{AMORT}}$ 10000,00 $\boxed{\text{x}\gtreqless\text{y}}$ 16379,75 $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{PV}}$ $-83620,25$

  1 $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{AMORT}}$ 8362,03 $\boxed{\text{x}\gtreqless\text{y}}$ 18017,72 $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{PV}}$ $-65602,53$

1 $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{AMORT}}$ 6560,25 $\boxed{\text{x}\gtrless\text{y}}$ 19819,50 $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{PV}}$ $-45783,03$

1 $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{AMORT}}$ 4578,30 $\boxed{\text{x}\gtrless\text{y}}$ 21801,45 $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{PV}}$ $-23981,58$

1 $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{AMORT}}$ 2398,16 $\boxed{\text{x}\gtrless\text{y}}$ 23981,59 $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{PV}}$ $0,01$

OBS.: A diferença de 0,01 é devido ao arredondamento.

- Planilha desse empréstimo:

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	100.000,00	–	–	–
1	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
2	65.602,53	18.017,72	8362,03	26.379,75
3	45.783,03	19.819,50	6560,25	26.379,75
4	23.981,58	21.801,45	4578,30	26.379,75
5	0,00	23.981,58	2.398,16	26.379,74*
Total	–	100.000,00	31.898,74	131.898,74

* Na planilha a última prestação foi ajustada para que o saldo devedor final seja igual a zero.

5.4 Problemas Propostos

1. A Empresa AKF faz um empréstimo de R$ 20.000,00, junto ao Banco do Povo, para ser pago em 5 anos à taxa de 19%a.a., pelo SAC. Faça a planilha desse empréstimo.

2. O Grupo FMS contrai um empréstimo de R$ 300.000,00 para ser pago em 8 semestres a taxa de 20% a.sem., pelo SAC. Monte a planilha desse empréstimo.

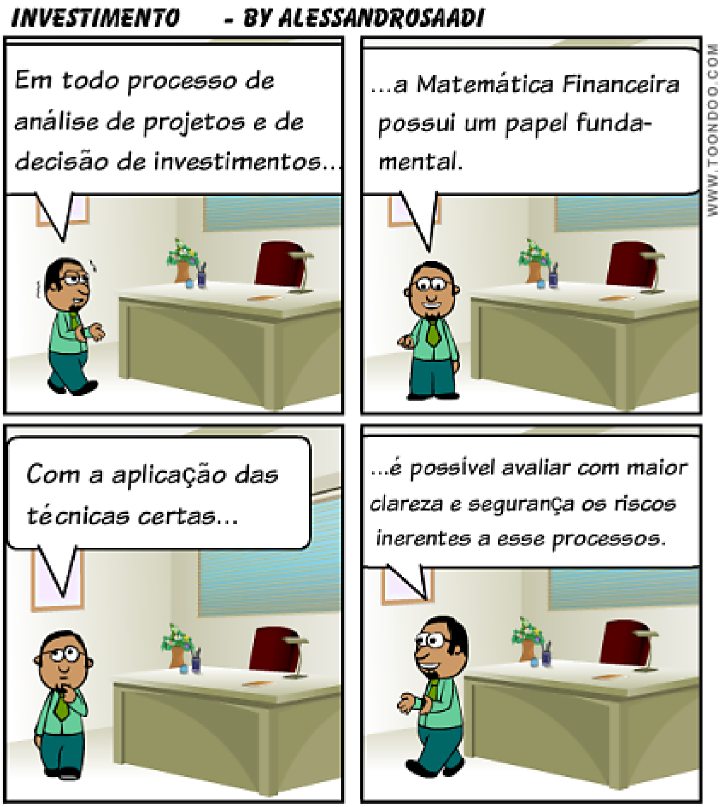
3. O Grupo Empresarial JT contrai um empréstimo de R$ 500.000,00 junto ao Banco de Fomento para ser pago em 6 prestações semestrais à taxa de 12%a. sem., pelo Sistema Francês. Monte a planilha desse empréstimo.

4. A Montadora de Veículos "Export" conseguiu um empréstimo de R$ 950.000,00 junto ao Banco de Fomento do Sul, para que pudesse se instalar na cidade do Rio Grande. O sistema utilizado será o SAF. A empresa terá 4 anos para saldar a dívida em prestações anuais. A taxa estabelecida foi de 19%a.a. Faça a planilha desse empréstimo.

5. O Grupo KBSA quer se instalar na região e para isso faz um empréstimo de R$ 42.000,00 para pagar em 5 meses. Sabe - se que o sistema utilizado é o SAF e a taxa nominal utilizada pelo banco é de 1,5%a.m. Monte a planilha desse empréstimo.

Capítulo 6

Análise de Investimentos



Técnicas para Análise de Investimentos

As técnicas podem ser entendidas como metodologia para medir o retorno dos investimentos. As mais importantes são:

- Payback
- Valor Presente Líquido (NPV)
- Taxa Interna de Retorno (IRR)

6.1 Payback

Pode ser entendido como o tempo exato de retorno necessário para se recuperar um investimento inicial.

Critérios de decisão:
Todo projeto deve ter um prazo limite para retornar os investimentos.

- Se o **payback for menor** que o período de *payback* máximo aceitável, **aceita-se o projeto;**
- Se o **payback for maior** que o período de *payback* máximo aceitável, **rejeita-se o projeto.**

Vantagens do *payback:*

- a maior vantagem do *payback* é a facilidade de se fazer o cálculo, pois se consideram apenas os valores de entradas e saídas de caixa, demostramos em diagrama de fluxo de caixa, por exemplo.

Desvantagens do *payback:*

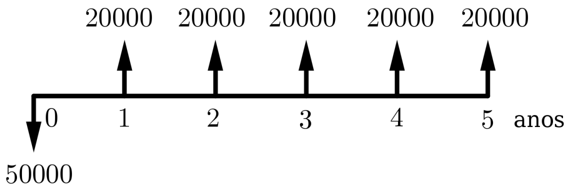
- a principal deficiencia do *payback* é a de não poder precisar com exatidão o período exato de retorno do investimento, pois desconsidera o valor do dinheiro no tempo. Por este motivo, esta técnica de análise é considerada uma técnica **não sofisticada.**

- Uma outra deficiencia é a de não considerar o fluxo de caixa após o período de *payback*.

Exemplo: Uma padaria está considerando a aquisição de um maquinário no valor de R$ 50.000,00, que gera entradas de caixa de R$ 20.000,00 para os próximos 5 anos (vida útil do maquinário). Determinar o *payback* deste projeto.

- Dados:
  Investimento inicial (PV): R$ 50.000,00
  Entradas de caixa (PMT): R$ 20.000,00
  Prazo do projeto (n): 5 anos
  Payback: ?

- Solução Algébrica:



  - consideramos cada período de 12 meses (1 ano)
  - no final do 1º período retorna R$ 20.000,00;
  - no final do 2º período retorna R$ 20.000,00;
  - o saldo de investimento a retornar após o 2º período é de R$ 10.000,00, ou seja, o *payback* será de **2 anos e meio** (pois R$ 10.000,00 corresponde ao retorno de meio período).

6.2 Valor Presente Líquido (NPV)

O **NPV** (Net Present Value), é obtido calculando-se o valor presente de uma série de fluxos (pagamentos ou recebimentos) com base em uma **taxa de custo de oportunidade** conhecida ou estimada, e subtraindo-se o investimento inicial.

Genericamente, podemos definir o NPV como sendo:

NPV = valor presente das entradas ou saídas de caixa (-) Investimento inicial

Podemos representá-lo através da seguinte fórmula:

$$\boxed{NPV = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_n}{(1+i)^n} - CF_0}$$

onde:
CF_0 = Valor do investimento inicial;
CF_n = Fluxo de caixa para **n** períodos.

Critérios de aceitação:

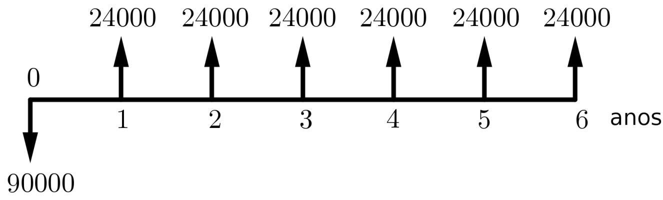
- Se o $NPV > 0$, o projeto deve ser aceito;
- Se o $NPV < 0$, o projeto deve ser recusado;
- Se o $NPV = 0$, o projeto não oferece ganho ou prejuízo.

Exemplos:

1. Um projeto de ampliação de uma padaria terá um investimento de R$ 90.000,00 e vai gerar entradas de caixa de R$ 24.000,00 nos próximos 6 anos. Considerando um custo de oportunidade de 10% a.a., determinar o NPV deste investimento.

   - Dados:
     Investimento inicial (CF_0): R$ 90.000,00
     Entradas de caixa (CF_n): R$ 24.000,00
     Prazo (n): 6 anos
     Custo de oportunidade (i): 10% a.a.
     Valor Presente Líquido (NPV)=?

- Fluxo de caixa do projeto de Investimento:



- Solução na HP-12C
  Na HP-12C, a função NPV calcula diretamente o valor presente líquido para um conjunto de até 20 fluxos de entrada, excluindo o investimento inicial. Para tanto, vamos trabalhar com funções de fluxo de caixa.

  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

  90000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$

  24000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  6 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{N_j}$

  10 $\boxed{\text{i}}$

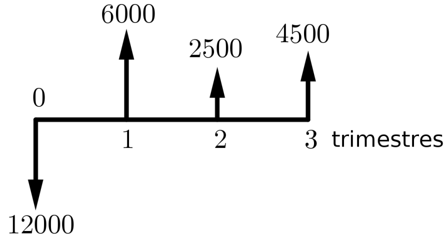
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$

- Como o NPV = R$ 14.526,26 $>$ 0 o projeto pode ser aceito.

2. Um pequeno comerciante tem R$ 12.000,00 para investir. Ele projeta 3 entradas de caixa trimestrais consecutivas de R$ 6.000,00, R$ 2.500,00 e R$ 4.500,00. Considerando uma taxa de oportunidade de 5% a.trim., calcular o NPV.

   - Dados:
     Investimento inicial (CF_0): R$ 12.000,00
     Entradas de caixa (CF_n): R$ 6.000,00; R$ 2.500,00 e R$ 4.500,00
     Prazo (n): 3 trimestres
     Custo de oportunidade (i): 5% a.trim.
     Valor Presente Líquido (NPV)=?

- Fluxo de caixa do projeto de Investimento:



- Solução na HP-12C

  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

  12000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$

  6000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  2500 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  4500 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  5 $\boxed{\text{i}}$

  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$

- Como o NPV = R\$ -130,87 $<$ 0 o projeto não pode ser aceito.

3. **Decisão sobre projetos mutuamente exclusivos-** Dois projetos A e B devem ser analisados. Tendo um investimento inicial de R\$ 135.000,00 os projetos apresentam os seguintes retornos:

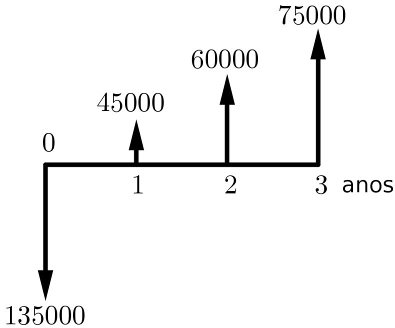
Ano	Projeto A	Projeto B
1	R\$ 45.000,00	R\$ 60.000,00
2	R\$ 60.000,00	R\$ 60.000,00
3	R\$ 75.000,00	R\$ 60.000,00

Sabendo da taxa ou custo de oportunidade de 12% a.a., decida sobre a melhor alternativa de investimento utilizando o NVP.

Projeto A:

- Dados:
  Investimento inicial (CF_0): R$ 135.000,00
  Entradas de caixa (CF_n): R$ 45.000,00; R$ 60.000,00 e R$ 75.000,00
  Prazo (n): 3 anos
  Custo de oportunidade (i): 12% a.a.
  Valor Presente Líquido (NPV)=?

- Fluxo de caixa do projeto de Investimento:



- Solução na HP-12C:
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

  135000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$

  45000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  60000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  75000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  12 $\boxed{\text{i}}$

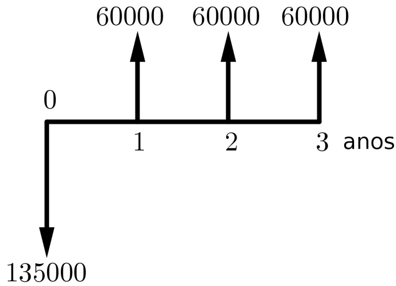
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$
  R$ 6.393,72

Projeto B:

- Dados:
  Investimento inicial (CF_0): R$ 12.000,00
  Entradas de caixa (CF_n): R$ 60.000,00

Prazo (n): 3 anos
Custo de oportunidade (i): 12% a.a.
Valor Presente Líquido (NPV)=?

- Fluxo de caixa do projeto de Investimento:



- Solução na HP-12C

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

135000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$

60000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

3 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{N_j}$

12 $\boxed{\text{i}}$

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$

R$ 9.109,88

O **Projeto B** deve ser aceito por ter o NPV > 0 e ser maior do que o NPV do Projeto A.

6.3 Taxa Interna de Retorno (IRR)

A **IRR** (Internal Rate Return), pode ser definida como a taxa de desconto que iguala os fluxos de caixa ao investimento inicial.

Vamos considerar como fórmula a seguinte equação:

$$\boxed{CF_0 = \sum_{j=1}^{n} = \frac{CF_j}{(1+i)^n}}$$

Critérios de decisão:

- Se a **IRR** > **Custo de oportunidade**, o projeto deve ser aceito;
- Se a **IRR** < **Custo de oportunidade**, o projeto deve ser recusado;
- Se a **IRR** = **Custo de oportunidade**, o projeto não oferece ganho em relação ao custo de oportunidade.

Exemplos:

1. Uma empresa faz um investimento de R$ 20.000,00 e tem como previsão de retorno três entradas anuais consecutivas de R$ 6.000,00, R$ 10.000,00 e R$ 8.000,00 respectivamente. Sabendo que um custo de oportunidade aceitável é de 10% a.a., utilize a IRR para avaliar se o projeto deve ser aceito.

   - Dados:
     Investimento inicial (CF_0): R$ 20.000,00
     Entradas de caixa (CF_j): R$ 6.000,00; R$ 10.000,00; R$ 8.000,00.
     Custo de oportunidade: 10% a.a.
   - Solução na HP-12C:
     $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

     20000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$

     6000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

     10000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

     8000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

     $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{IRR}}$
     9,26%

   IRR < Custo de oportunidade (10%), o projeto não deve ser aceito.

2. Um investidor pode aplicar R$ 300.000,00 em dois projetos distintos, os quais geram os seguintes fluxos de caixa demonstrados a seguir:

Ano	Projeto 1 (Entradas)	Projeto 2 (Entradas)
1	R$ 40.000,00	R$ 200.000,00
2	R$ 80.000,00	R$ 0,00
3	R$ 100.000,00	R$ 90.000,00
4	R$ 180.000,00	R$ 90.000,00

Sabendo que o investidor pode aplicar no mercado financeiro à taxa de 15%a.a, utilize o método da IRR para saber qual projeto ele de escolher.

Projeto 1:

- Dados:
  Investimento inicial (CF_0): R$ 300.000,00
  Entradas de caixa (CF_j): R$ 40.000,00; R$ 80.000,00; R$ 100.000,00 e R$ 180.000,00
  Custo de oportunidade: 15% a.a.
- Solução na HP-12C:
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$
  300000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$
  40000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$
  80000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$
  100000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$
  180000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{IRR}}$
  10,07%

Projeto 2:

- Dados:
  Investimento inicial (CF_0): R$ 300.000,00

Entradas de caixa (CF_j): R\$ 200.000,00; R\$ 0,00; R\$ 90.000,00 e R\$ 90.000,00
Custo de oportunidade: 10% a.a.

- Solução na HP-12C:
  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$

  300000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_0}$

  200000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  0 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  90000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  90000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{CF_j}$

  $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{IRR}}$
  11,97%

O **Projeto 2** deve ser aceito por ter IRR > Custo de oportunidade (10%) e ser maior do que o IRR do Projeto 1.

6.4 Problemas Propostos

1. Uma empresa estuda a possibilidade de substituir um equipamento. Dispõe de duas alternativas mutuamente exclusivas, o equipamento N1 e o equipamento V. Os fluxos de caixa estimados são os seguintes:

Alternativas	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Máquina N1	-R$ 100,00	R$1.000,00	R$ 200,00
Máquina V	-R$ 90,00	R$ 300,00	R$ 1.400,00

   Sabendo da taxa ou custo de oportunidade de 30% a.a., decida sobre a melhor alternativa de investimento utilizando o NVP.

2. Para as seguintes alternativas, calcular o NPV e determinar qual das alternativas representa a melhor escolha econômica:

	Alternativa X	Alternativa Y
Investimento inicial	R$ 5.000,00	R$ 8.000,00
Fluxo de caixa	R$ 1.672/ ano	R$ 1.594/ano
Duração	5 anos	10 anos
Custo do capital	10% a.a.	10% a.a.

3. Um apartamento foi colocado a venda pelo valor de R$ 300.000,00 a vista, ou em dois anos de prazo, com R$ 80.000,00 de entrada, mais 12 prestações mensais de R$ 18.000,00 e mais 12 de R$ 28.186,00. Admitindo - se que você esteja interessado em adquiri - lo e que tenha recursos para comprá - lo até mesmo a vista, qual seria sua decisão, se você tivesse também a opção de aplicar seus recursos em um Fundo de Renda Fixa a uma taxa de 6% a.m, utilizando o método do NPV? Verifique também a sua decisão para as taxas de 8% a.m. e 10% a.m.

4. Ache a taxa interna de retorno do seguinte fluxo de caixa: Aplicação inicial de R$ 45.252,81 e quatro retornos mensais consecutivos de R$ 10.000,00; R$ 12.500,00; R$ 13.000,00 e R$ 16.000,00.

5. Calcule a taxa interna de retorno (IRR) para as alternativas seguintes classificando - as em ordem ascendente de interesse econômico a partir de uma taxa mínima de atratividade de 10%a.a. e um investimento inicial de R$ 50.000,00:

Alternativa	Retorno	Período
A	R$ 2.500,00	24 parcelas mensais
B	R$ 15.000,00	4 parcelas semestrais
C	R$ 32.000,00	2 parcelas anuais

6. Uma empresa transportadora está analisando a conveniência da compra de um caminhão no valor de R$ 103.000,00. Segundo os técnicos dessa empresa, a utilização desse veículo nos próximos 5 anos deverá gerar receitas líquidas estimadas em R$ 30.000,00, R$ 35.000,00, R$ 32.000,00, R$ 28.000,00 e R$ 20.000,00 respectivamente. Sabendo - se que no final do 5º ano se espera vender esse caminhão por R$ 17.000,00, verificar qual a decisão da empresa para taxas de retorno, fixadas em 15% e 18% ao ano.

Apêndice A

Uso da Calculadora HP-12C

Figura A.1: Calculadora HP-12C

Operações Básicas

A.1 Ligar e Desligar

Pressione $\boxed{\text{ON}}$

A.2 Notação Decimal

A calculadora HP-12C possui duas formas de separar a parte fracionária da parte inteira de um número: utilizando ponto ou vírgula. Para mudar de uma forma para outra proceda do seguinte modo: desligue a máquina; pressione $\boxed{\text{ON}}$, e mantendo-a pressionada, pressione a tecla $\boxed{\bullet}$, solte $\boxed{\text{ON}}$ e solte $\boxed{\bullet}$.

A.3 Limpar o Visor

Pressione $\boxed{\text{CLX}}$

A.4 Teclas $\boxed{\mathbf{f}}$ e $\boxed{\mathbf{g}}$

A maioria das teclas da HP-12C tem mais de uma função, ou seja, uma mesma tecla pode realizar até três funções, conforme descrito a seguir:

- função normal, escrita em cor branca na face superior da própria tecla;

- função amarela, escrita em cor amarela acima da tecla;

- função azul, escrita em cor azul na face lateral inferior da própria tecla.

Para realizarmos as funções amarela ou azul de cada tecla, basta que as teclas amarela $\boxed{\text{f}}$ ou azul $\boxed{\text{g}}$ sejam, respectivamente, acionadas imediatamente antes de pressionar a tecla desejada. Se logo após o acionamento de qualquer dessas duas teclas houver necessidade de eliminar sua atuação, basta acionar $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

A.5 Quantidade de Casas Decimais no Visor

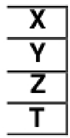
Pressione a tecla $\boxed{\text{f}}$ seguida do número de casas decimais desejado.

A.6 Trocar o Sinal

Pressione $\boxed{\text{CHS}}$

A.7 Pilha Operacional (X, Y, Z, T)

A máquina HP-12C dispõe de quatro registradores especiais (X, Y, Z, T), que são usados para o armazenamento de números durante os cálculos. Para entender o funcionamento desses registradores, devemos visualizá -los em forma de pilha, como na figura abaixo:



Quando um número é digitado, ele imediatamente ocupa o registrador X, que é o único cujo conteúdo aparece no visor. Cálculos com um número envolvem o conteúdo do registrador X , cálculos com dois números envolvem o conteúdo dos registradores X e Y. Os registradores Z e T são usados principalmente para a retenção automática dos resultados intermediários de cálculos em cadeia. Os conteúdos dos registradores especiais são movimentados quando os valores são colocados dentro da máquina através da tecla $\boxed{\text{ENTER}}$, quando são efetuadas operações aritméticas por meio das teclas $\boxed{+}$; $\boxed{-}$; $\boxed{\times}$; $\boxed{\div}$ e quando as teclas $\boxed{\text{R}\downarrow}$ ou $\boxed{\text{X}\gtrless\text{Y}}$ forem acionadas.
A função $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{REG}}$ limpa de uma só vez os conteúdos das memórias transitórias (X, Y, Z, T), além das memórias fixas (0 a 9 e .0 a .9) e das memórias financeiras, conforme veremos mais adiante.

A.8 Tecla $\boxed{\text{ENTER}}$

Pressionando-se essa tecla desencadeiam-se as seguintes transferências entre os registradores:

- o conteúdo de X é transferido para Y e mantido em X;

- o conteúdo de Y é transferido para Z;
- o conteúdo de Z é transferido para T;
- o conteúdo de T é perdido.

A.9 Tecla $\boxed{R\downarrow}$

Essa tecla promove uma troca nos conteúdos dos quatro registradores especiais. O acionamento dessa tecla por quatro vezes consecutivas permite conhecer o conteúdo dos quatro registradores (X, Y, Z, T) e os devolve para sua posição inicial.

A.10 Teclas $\boxed{+}$; $\boxed{-}$; $\boxed{\times}$; $\boxed{\div}$.

Todas as operações aritméticas são efetuadas apenas com o conteúdo dos registradores X e Y. Os exemplos a seguir esclarecem a utilização dessas teclas.

Exemplos

1. Efetuar: 10 + 23 - 2

Na HP-12C:	10 $\boxed{\text{ENTER}}$	
	23 $\boxed{+}$	
	2 $\boxed{-}$	Resp.:31

2. Efetuar: (40 + 5) $\div$ 9

Na HP-12C:	40 $\boxed{\text{ENTER}}$	
	5 $\boxed{+}$	
	9 $\boxed{\div}$	Resp.:5

3. Efetuar: $(7 \cdot 19 + 3) \div (47 - 5 \cdot 2)$

Na HP-12C:	7	ENTER	2	×
	19	×	47	−
	3	+		CHS
	5	ENTER		÷
Resp.:3,67				

A.11 Tecla $\boxed{X \gtrless Y}$

Essa tecla troca o número que está no registrador X pelo número que está no registrador Y e vice-versa.
Exemplos

1. Efetuar: $70 \div 2$

Na HP-12C:	2	ENTER		
	70	X≷Y	÷	Resp.:35

A.12 Teclas $\boxed{y^x}$, $\boxed{1/x}$

Usadas no cálculo de potenciação e radiciação.
Exemplos

1. Efetuar: 6^2

Na HP-12C:	6	ENTER	
	2	y^x	Resp.:36

2. Efetuar $\sqrt[3]{125}$

Na HP-12C: 125 $\boxed{\text{ENTER}}$	
3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{y^x}$	Resp.:5

A.13 Tecla $\boxed{\%}$

Calcula a porcentagem de um determinado número.
Exemplos

1. Calcular 7% de 350.

Na HP-12C: 350 $\boxed{\text{ENTER}}$	
7 $\boxed{\%}$	Resp.:24,5

2. Uma mercadoria que custava $400,00 sofreu um reajuste de 40%. Qual o novo preço dessa mercadoria?

Na HP-12C: 400 $\boxed{\text{ENTER}}$	
40 $\boxed{\%}$ $\boxed{+}$	Resp.:$560,00

3. Um veículo cujo preço é $15.200,00 é oferecido com um desconto de 9% nas compras a vista. Calcule o preço a vista.

Na HP-12C: 15200 $\boxed{\text{ENTER}}$	
9 $\boxed{\%}$ $\boxed{-}$	Resp.:$13832,00

A.14 Tecla $\boxed{\Delta\%}$

Calcula a diferença percentual entre dois números.
Exemplos

1. Um objeto que custava $1.500,00 passou a custar $1.700,00. Qual o aumento percentual sofrido?

Na HP-12C: 1500 $\boxed{\text{ENTER}}$
1700 $\boxed{\Delta\%}$
Resp.:13,33% (1.700 é 13,33% maior que 1.500)

2. Um dólar valia R$ 1,65 e passou a valer R$ 1,77. Calcule sua valorização.

Na HP-12C: 1,65 $\boxed{\text{ENTER}}$
1,77 $\boxed{\Delta\%}$
Resp.:7,27% (1,77 é 7,27% maior que 1,65)

3. As ações de uma certa empresa caíram de R$ 33,50 para R$ 31,10. Calcule o percentual da queda.

Na HP-12C: 33,50 $\boxed{\text{ENTER}}$
31,10 $\boxed{\Delta\%}$
Resp.:-7,16% (31,10 é -7,16% menor que 33,50)

A.15 Tecla $\boxed{\%T}$

Determina quanto um número da memória X representa percentualmente em relação ao número da memória Y .

Exemplos

1. Determinar quanto 12 representa percentualmente um relação a 72.

Na HP-12C:	72	$\boxed{\text{ENTER}}$	
	12	$\boxed{\%\text{T}}$	Resp.:16,67%

A.16 Teclas $\boxed{\textbf{STO}}$ e $\boxed{\textbf{RCL}}$

A tecla $\boxed{\text{STO}}$ serve para guardar e operar valores nas 20 memórias fixas existentes na máquina HP-12C. Essas memórias serão armazenadas de 0 a 9 e .0 a .9 . A tecla $\boxed{\text{RCL}}$ serve para chamar os valores de cada uma das 20 memórias para o visor.
Se logo após o acionamento de qualquer dessas duas teclas houver necessidade de eliminar sua atuação, basta acionar $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.
Exemplos

1. Guardar o número 25 na memória 1.

   Na HP-12C: 25 $\boxed{\text{STO}}$ 1

2. Somar 200 ao conteúdo da memória 1, guardando o resultado na própria memória 1.

   Na HP-12C: 200 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{+}$ 1

3. Chamar o conteúdo da memória 1 para o visor.

   Na HP-12C: $\boxed{\text{RCL}}$ 1 Resp.: 225

A.17 Cálculo com Datas

A HP-12C usa dois formatos distintos de datas:

- Dia - Mês - Ano → utilizando a tecla $\boxed{\text{D.MY}}$;
- Mês - Dia - Ano → utilizando a tecla $\boxed{\text{M.DY}}$.

Para introduzir uma data com o formato Dia - Mês - Ano (D.MY), devemos seguir os seguintes passos:

1. fixe o número de casas decimais em 6 (seis), para que o visor possa mostrar as datas digitadas ($\boxed{\text{f}}$ 6);
2. pressione $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{D.MY}}$;
3. pressione o número de dias (com 2 dígitos);
4. pressione a tecla $\boxed{\bullet}$;
5. pressione o mês (com 2 dígitos) seguido do ano (com 4 dígitos).

Exemplo

1. Introduzir a data 13 de novembro de 2014.

Na HP-12C:	$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{D.MY}}$
	13 $\boxed{\bullet}$ 112014

Para introduzir uma data com o formato Mês-Dia-Ano (M.DY), procedemos de modo análogo. As funções de calendário fornecidas com a HP-12C podem manipular data entre 15 de outubro de 1582 até 25 de novembro de 4046. Veremos através dos exemplos abaixo como calcular o número de dias entre duas datas através das teclas $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\Delta\text{DYS}}$, e como somar ou subtrair um número de dias a uma data utilizando as teclas $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{DATE}}$.

Exemplos

1. Calcular o número de dias corridos entre 23/12/2014 e 05/04/2016.

Na HP-12C:	g	D.MY		
	23 •	122014		ENTER
	05 •	042016	g	ΔDYS
Resp.:469 dias				

2. Somar 58 dias á data 25/07/2016.

Na HP-12C:	g	D.MY	
	25 •	072016	ENTER
	58 g	DATE	
Resp.:21/09/2016 3 (quarta-feira)			

O visor mostra o número 3 à direita da data, o que indica que a data cairá numa quarta-feira. (Segunda-feira corresponde ao número 1)

3. Subtrair 43 dias à data 25/07/2016.

Na HP-12C:	g	D.MY	
	25 •	072016	ENTER
	43 CHS	g	DATE
Resp.:12/06/2016 7 (domingo)			

4. Que dia da semana você nasceu?

Na HP-12C:	$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{D.MY}}$	
	data nascimento $\boxed{\text{ENTER}}$	
	0 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{DATE}}$	

A.18 Tecla $\boxed{\Sigma+}$

Para realizar cálculos estatísticos os dados são introduzidos na HP-12C usando-se a tecla $\boxed{\Sigma+}$, a qual automaticamente calcula estatísticas desses dados e os armazena nas memórias de 1 a 6.
Antes de começar a acumular estatísticas para um novo conjuntos de dados, devemos apagar os dados armazenados pressionando $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\Sigma}$.
Mostraremos a utilização da tecla acima através de um exemplo.
Exemplo

1. O banco expede um extrato com a movimentação financeira de um cliente no mês 01/2003. Calcular o saldo médio referente a esse mês.

PERÍODO	HISTÓRICO	VALOR	SALDO	N. DIAS
01/01 a 04/01	Saldo	-	250,00 (C)	4
05/01	Depósito	95,00	345,00 (C)	-
05/01 a 21/01	Saldo	-	345,00 (C)	17
22/01	Cheque comp.	45,00	300,00 (C)	-
22/01 a 26/01	Saldo	-	300,00 (C)	5
27/01	Depósito	70,00	370,00 (C)	-
27/01 a 29/01	Saldo	-	370,00 (C)	3
30/01	Cheque comp.	50,00	320,00 (C)	-
30/01 a 31/01	Saldo	-	320,00 (C)	2

Na HP-12C: 250 $\boxed{\text{ENTER}}$ (registra o valor do 1º saldo)

4 $\boxed{\Sigma+}$ (multiplica pelos respectivos dias)

345 $\boxed{\text{ENTER}}$ (registra o valor do 2º saldo)

17 $\boxed{\Sigma+}$ (multiplica pelos respectivos dias)

300 $\boxed{\text{ENTER}}$ (registra o valor do 3º saldo)

5 $\boxed{\Sigma+}$ (multiplica pelos respectivos dias)

370 $\boxed{\text{ENTER}}$ (registra o valor do 4º saldo)

3 $\boxed{\Sigma+}$ (multiplica pelos respectivos dias)

320 $\boxed{\text{ENTER}}$ (registra o valor do 5º saldo)

2 $\boxed{\Sigma+}$ (multiplica pelos respectivos dias)

$\boxed{\text{RCL}}$ 6 (pede a soma de todos os produtos)

30 $\boxed{\div}$ (divide por trinta dias)

Na fórmula :

$$\text{SM}=\frac{250 \cdot 4 + 345 \cdot 17 + 300 \cdot 5 + 370 \cdot 3 + 320 \cdot 2}{30}$$

SM=337,17 Resp.:$ 337,17

Apêndice B

Respostas dos Problemas

Problemas Propostos 2.4

1. R$ 257,60
2. 5% a.m.
3. R$ 1.315,20
4. (a) R$ 54,00 e R$ 504,00
   (b) R$ 122,40 e R$ 2.522,40
   (c) R$ 47,25 e R$ 397,25
5. 66,67% a.a.
6. R$ 9.107,50
7. 21% a.a.
8. 3,125% a.m.
9. 50% a.m.
10. X = R$ 87,50; Y = R$ 138,75
11. (a) R$ 31,50

(b) R$ 28,56

(c) Tabela Pagamento Total

Fato	Valor R$
Saldo a pagar	105,00
Juros	16,80
Despesa do mês	150,00
Total	**R$ 271,80**

Problemas Propostos 3.7

1. (a) R$ 844,13 e R$ 94,13
   (b) R$ 2.531,35 e R$ 131,35
   (c) R$ 453,26 e R$ 103,26
2. R$ 19.895,08
3. Conv. linear: R$ 20.188,89; Conv. exponencial: R$ 20.186,07
4. 0,2331% a.d. e 7,23% a.m.
5. Conv. linear: R$ 20,63 ou R$ 28,33; Conv. exponencial: R$ 20,31
6. 8,45% a.a.
7. R$ 276.246,44
8. 11,35% a.a.
9. 2 anos
10. R$ 1.343,26

Problemas Propostos 4.3

1. R$ 412,61
2. R$ 52,87

3. PA = R\$ 1.000,03; PB = R\$ 1.099,93. Melhor opção é A.

4. R\$ 151,63

5. A vista = R\$ 150.000,00; PA = R\$ 150.167,75;
   PB = R\$ 152.703,30; Melhor opção é a vista.

6. 60 meses

7. 5% a.m.

8. R\$ 10.398,87

9. R\$ 8.453,98

10. R\$ 448.679,29

11. 20 meses

12. R\$ 697,48

13. R\$ 9.999,96

14. R\$ 34.180,26

15. R\$ 989,89

16. R\$ 482,59

17. R\$ 30.549,55

18. R\$ 850,25

19. E = R\$ 50.0000,00; PMT_{TRIM}= R\$ 59.966,28;
    PMT_{MENS}= R\$ 9.001,50

Problemas Propostos 5.4

1. Planilha SAC:

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	20.000,00	–	–	–
1	16.000,00	4.000,00	3.800,00	7.800,00
2	12.000,00	4.000,00	3.040,00	7.040,00
3	8.000,00	4.000,00	2.280,00	6.280,00
4	4.000,00	4.000,00	1.520,00	5.520,00
5	0,00	4.000,00	760,00	4.760,00
Total	–	20.000,00	11.400,00	31.400,00

2. Planilha SAC:

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	300.000,00	–	–	–
1	262.500,00	37.500,00	60.000,00	97.500,00
2	225.000,00	37.500,00	52.500,00	90.000,00
3	187.500,00	37.500,00	45.000,00	82.500,00
4	150.000,00	37.500,00	37.500,00	75.000,00
5	112.500,00	37.500,00	30.000,00	67.500,00
6	75.000,00	37.500,00	22.500,00	60.800,00
7	37.500,00	37.500,00	15.000,00	52.500,00
8	0,00	37.500,00	7.500,00	45.000,00
Total	–	300.000,00	270.000,00	570.000,00

3. Planilha SAF :

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	500.000,00	–	–	–
1	438.387,14	61.612,86	60.000,00	121.612,86
2	369.380,74	69.006,40	52.606,46	121.612,86
3	292.093,57	77.287,17	44.325,69	121.612,86
4	205.531,94	86.561,63	35.051,23	121.612,86
5	108.582,91	96.949,03	24.663,83	121.612,86
6	0,00	108.582,91	13.029,95	121.612,86
Total	–	500.000,00	229.677,16	729.677.16

4. Planilha SAF :

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	950.000,00	–	–	–
1	770.458,61	179.541,39	180.500,00	360.041,39
2	556.804,36	213.654,25	146.387,14	360.041,39
3	302.555,80	254.248,56	105.792,83	360.041,39
4	0,00	302.555,80	57.485.60	360.041,40
Total	–	950.000,00	490.165,57	1.440.165,57

5. Planilha SAF :

n (k)	SD_k	A_k	J_k	PMT_k
0	42.000,00	–	–	–
1	33.848.25	8.151.75	630,00	8.781.75
2	25.574.22	8.274.03	507.72	8.781.75
3	17.176,08	8.398.14	383.61	8.781.75
4	8.651,97	8.524,11	257,64	8.781.75
5	0,00	8.651,97	129,78	8.781.75
Total	–	42.000,00	1.908.75	43.908,75

Problemas Propostos 6.4

1. A alternativa V deve ser aceita por ter o NPV = R\$ 969,17 $>$ 0 e ser maior do que o da alternativa N1 onde NPV =R\$787,57.

2. A alternativa Y deve ser aceita por ter o NPV = R\$ 1.794,44 $>$ 0 e ser maior do que o da alternativa X, NPV=R\$1.338,20.

3. (a) para a taxa de 6% a.m.:
   como NPV = R\$ 348.346,54 $>$ R\$ 300.000,00 (preço à vista), a decisão é comprar à vista.

   (b) para a taxa de 8% a.m.:
   como NPV = R\$ 300.001,09 $\cong$ R\$ 300.000,00 é indiferente comprar à vista ou a prazo.

(c) para a taxa de 10% a.m.:
como NPV = R$ 263.839,73 < R$ 300.000,00 a decisão é comprar a prazo.

4. 5,00%

5. B: TIR = 16,02 % a.a.
C: TIR = 18,16 % a.a.
A: TIR = 19,75 % a.a.

6. (a) para a taxa de 15% a.a.:
Como o NPV = R$ 4.997,13 > 0 o projeto pode ser aceito.

(b) para a taxa de 18% a.a.:
Como o NPV = R$ -2.348,50 < 0 o projeto não deve ser aceito.

Apêndice C

Tabelas Financeiras

Fórmulas das Tabelas:

$$FAC = (1+i)^n$$

$$FVP_m = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$FAC_m = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

TABELA FINANCEIRA FAC

n \ i	1,0%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%	6,0%	7,0%	8,0%	9,0%	10,0%	n \ i
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000	**1**
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100	**2**
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310	**3**
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641	**4**
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105	**5**
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716	**6**
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487	**7**
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436	**8**
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579	**9**
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937	**10**
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531	**11**
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384	**12**
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523	**13**
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975	**14**
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772	**15**
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950	**16**
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545	**17**
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599	**18**
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159	**19**
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275	**20**
21	1,2324	1,5157	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996	4,1406	5,0338	6,1088	7,4002	**21**
22	1,2447	1,5460	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035	4,4304	5,4365	6,6586	8,1403	**22**
23	1,2572	1,5769	1,9736	2,4647	3,0715	3,8197	4,7405	5,8715	7,2579	8,9543	**23**
24	1,2697	1,6084	2,0328	2,5633	3,2251	4,0489	5,0724	6,3412	7,9111	9,8497	**24**
25	1,2824	1,6406	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919	5,4274	6,8485	8,6231	10,8347	**25**
26	1,2953	1,6734	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494	5,8074	7,3964	9,3992	11,9182	**26**
27	1,3082	1,7069	2,2213	2,8834	3,7335	4,8223	6,2139	7,9881	10,2451	13,1100	**27**
28	1,3213	1,7410	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117	6,6488	8,6271	11,1671	14,4210	**28**
29	1,3345	1,7758	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184	7,1143	9,3173	12,1722	15,8631	**29**
30	1,3478	1,8114	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,0627	13,2677	17,4494	**30**

TABELA FINANCEIRA FVPm

n \ i	**1,0%**	**2,0%**	**3,0%**	**4,0%**	**5,0%**	**6,0%**	**7,0%**	**8,0%**	**9,0%**	**10,0%**	**n \ i**
1	0,99010	0,98039	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340	0,93458	0,92593	0,91743	0,90909	**1**
2	1,97040	1,94156	1,91347	1,88609	1,85941	1,83339	1,80802	1,78326	1,75911	1,73554	**2**
3	2,94099	2,88388	2,82861	2,77509	2,72325	2,67301	2,62432	2,57710	2,53129	2,48685	**3**
4	3,90197	3,80773	3,71710	3,62990	3,54595	3,46511	3,38721	3,31213	3,23972	3,16987	**4**
5	4,85343	4,71346	4,57971	4,45182	4,32948	4,21236	4,10020	3,99271	3,88965	3,79079	**5**
6	5,79548	5,60143	5,41719	5,24214	5,07569	4,91732	4,76654	4,62288	4,48592	4,35526	**6**
7	6,72819	6,47199	6,23028	6,00205	5,78637	5,58238	5,38929	5,20637	5,03295	4,86842	**7**
8	7,65168	7,32548	7,01969	6,73274	6,46321	6,20979	5,97130	5,74664	5,53482	5,33493	**8**
9	8,56602	8,16224	7,78611	7,43533	7,10782	6,80169	6,51523	6,24689	5,99525	5,75902	**9**
10	9,47130	8,98259	8,53020	8,11090	7,72173	7,36009	7,02358	6,71008	6,41766	6,14457	**10**
11	10,36763	9,78685	9,25262	8,76048	8,30641	7,88687	7,49867	7,13896	6,80519	6,49506	**11**
12	11,25508	10,57534	9,95400	9,38507	8,86325	8,38384	7,94269	7,53608	7,16073	6,81369	**12**
13	12,13374	11,34837	10,63496	9,98565	9,39357	8,85268	8,35765	7,90378	7,48690	7,10336	**13**
14	13,00370	12,10625	11,29607	10,56312	9,89864	9,29498	8,74547	8,24424	7,78615	7,36669	**14**
15	13,86505	12,84926	11,93794	11,11839	10,37966	9,71225	9,10791	8,55948	8,06069	7,60608	**15**
16	14,71787	13,57771	12,56110	11,65230	10,83777	10,10590	9,44665	8,85137	8,31256	7,82371	**16**
17	15,56225	14,29187	13,16612	12,16567	11,27407	10,47726	9,76322	9,12164	8,54363	8,02155	**17**
18	16,39827	14,99203	13,75351	12,65930	11,68959	10,82760	10,05909	9,37189	8,75563	8,20141	**18**
19	17,22601	15,67846	14,32380	13,13394	12,08532	11,15812	10,33560	9,60360	8,95011	8,36492	**19**
20	18,04555	16,35143	14,87747	13,59033	12,46221	11,46992	10,59401	9,81815	9,12855	8,51356	**20**
21	18,85698	17,01121	15,41502	14,02916	12,82115	11,76408	10,83553	10,01680	9,29224	8,64869	**21**
22	19,66038	17,65805	15,93692	14,45112	13,16300	12,04158	11,06124	10,20074	9,44243	8,77154	**22**
23	20,45582	18,29220	16,44361	14,85684	13,48857	12,30338	11,27219	10,37106	9,58021	8,88322	**23**
24	21,24339	18,91393	16,93554	15,24696	13,79864	12,55036	11,46933	10,52876	9,70661	8,98474	**24**
25	22,02316	19,52346	17,41315	15,62208	14,09394	12,78336	11,65358	10,67478	9,82258	9,07704	**25**
26	22,79520	20,12104	17,87684	15,98277	14,37519	13,00317	11,82578	10,80998	9,92897	9,16095	**26**
27	23,55961	20,70690	18,32703	16,32959	14,64303	13,21053	11,98671	10,93516	10,02658	9,23722	**27**
28	24,31644	21,28127	18,76411	16,66306	14,89813	13,40616	12,13711	11,05108	10,11613	9,30657	**28**
29	25,06579	21,84438	19,18845	16,98371	15,14107	13,59072	12,27767	11,15841	10,19828	9,36961	**29**
30	25,80771	22,39646	19,60044	17,29203	15,37245	13,76483	12,40904	11,25778	10,27365	9,42691	**30**

TABELA FINANCEIRA FACm

n \ i	1,0%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%	6,0%	7,0%	8,0%	9,0%	10,0%	n \ i
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600	2,0700	2,0800	2,0900	2,1000	2
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464	3,2781	3,3100	3
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746	4,4399	4,5061	4,5731	4,6410	4
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371	5,7507	5,8666	5,9847	6,1051	5
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753	7,1533	7,3359	7,5233	7,7156	6
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938	8,6540	8,9228	9,2004	9,4872	7
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975	10,2598	10,6366	11,0285	11,4359	8
9	9,3685	9,7546	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913	11,9780	12,4876	13,0210	13,5795	9
10	10,4622	10,9497	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808	13,8164	14,4866	15,1929	15,9374	10
11	11,5668	12,1687	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716	15,7836	16,6455	17,5603	18,5312	11
12	12,6825	13,4121	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699	17,8885	18,9771	20,1407	21,3843	12
13	13,8093	14,6803	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821	20,1406	21,4953	22,9534	24,5227	13
14	14,9474	15,9739	17,0863	18,2919	19,5986	21,0151	22,5505	24,2149	26,0192	27,9750	14
15	16,0969	17,2934	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760	25,1290	27,1521	29,3609	31,7725	15
16	17,2579	18,6393	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725	27,8881	30,3243	33,0034	35,9497	16
17	18,4304	20,0121	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129	30,8402	33,7502	36,9737	40,5447	17
18	19,6147	21,4123	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057	33,9990	37,4502	41,3013	45,5992	18
19	20,8109	22,8406	25,1169	27,6712	30,5390	33,7600	37,3790	41,4463	46,0185	51,1591	19
20	22,0190	24,2974	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856	40,9955	45,7620	51,1601	57,2750	20
21	23,2392	25,7833	28,6765	31,9692	35,7193	39,9927	44,8652	50,4229	56,7645	64,0025	21
22	24,4716	27,2990	30,5368	34,2480	38,5052	43,3923	49,0057	55,4568	62,8733	71,4027	22
23	25,7163	28,8450	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958	53,4361	60,8933	69,5319	79,5430	23
24	26,9735	30,4219	34,4265	39,0826	44,5020	50,8156	58,1767	66,7648	76,7898	88,4973	24
25	28,2432	32,0303	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645	63,2490	73,1059	84,7009	98,3471	25
26	29,5256	33,6709	38,5530	44,3117	51,1135	59,1564	68,6765	79,9544	93,3240	109,1818	26
27	30,8209	35,3443	40,7096	47,0842	54,6691	63,7058	74,4838	87,3508	102,7231	121,0999	27
28	32,1291	37,0512	42,9309	49,9676	58,4026	68,5281	80,6977	95,3388	112,9682	134,2099	28
29	33,4504	38,7922	45,2189	52,9663	62,3227	73,6398	87,3465	103,9659	124,1354	148,6309	29
30	34,7849	40,5681	47,5754	56,0849	66,4388	79,0582	94,4608	113,2832	136,3075	164,4940	30

Referências Bibliográficas

[1] CASTELO BRANCO, Anísio Costa. **Matemática Financeira Aplicada: Método Algébrico, HP-12C, Microsoft Excel.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

[2] GUERRA, Fernando. **Matemática Financeira Através da HP-12C.** Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

[3] TEIXEIRA, James, NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática Financeira.** São Paulo: Pearson Eduacation do Brasil, 1998.

[4] MATHIAS, Washington Franco, GOMES, José Maria. **Matemática Financeira.** São Paulo: Atlas, 2002.

[5] —————- **HP-12c Calculadora Financeira. Guia do Usuário.** Disponível em <http://www.hp.com/ctg/Manual/bpia5238.pdf> Acesso em 09 de julho de 2015.

[6] —————- **Calculadora HP-12C**. Disponível em <http://www.mat.ufba.br/disciplinas/financeira/utiliz_hp.pdf> Acesso em 27 de agosto de 2015.

[7] SAADI, Alessandro da Silva. **A Matemática Financeira na Construção da Cidadania**. 2006. 20f. Monografia (Especialização em Matemática)- Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2006.

[8] SAADI, Alessandro da Silva. **Situações-problema no Ensino de Matemática Financeira**. 2013. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.